

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Dynamique des opinions: comparaison de quatre modèles

Wain, Karoline

Award date:
2009

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Dynamique des opinions: *Comparaison de quatre modèles.*

Wain Karoline, 2^{ème} Master en Sciences
Mathématiques

Pour m'avoir toujours bien conseillée et encadrée ainsi que pour la disponibilité dont il a toujours fait preuve au cours de la réalisation de ce mémoire, je tiens à remercier tout particulièrement mon promoteur, Timoteo Carletti.

Pour l'accueil que j'ai reçu lors de mon stage à Florence, pour leur gentillesse envers moi ainsi que pour l'aide apportée dans la réalisation de mon mémoire, je tiens à remercier Franco Bagnoli, Graziano Barnabei ainsi que toute l'équipe du département de Physique de l'Université de Florence.

Pour avoir toujours su me guider dans les bons comme dans les mauvais moments, pour le soutien continu dont ils ont toujours fait preuve, pour m'avoir supportée tout au long de la réalisation de ce travail mais également durant ces 5 années d'étude, je voulais également remercier mes parents, ma soeur ainsi que tout mon entourage.

Résumé

Ce mémoire a pour objectif d'étudier l'évolution de la dynamique de formation d'opinions au sein d'une population qui est répartie en petits groupes de discussion (de taille fixe ou aléatoire).

Cette étude est intéressante car elle pourrait permettre, dans un avenir proche, de prédire de façon plus précise l'évolution d'une opinion (élections, proposition de réforme, ...) au sein d'une population afin d'éviter les surprises générales provoquées par des retournements de situations, comme cela c'est déjà vu dans plusieurs pays.

Dans un premier temps nous allons analyser différents modèles de formation d'opinions établis par S. Galam.

Nous verrons d'abord les modèles où la population a le choix entre seulement deux opinions. Dans ce cas, l'analyse se base sur la taille des groupes de discussion et l'évolution de l'opinion au sein de ces groupes. Ensuite nous verrons le cas où la population a le choix entre trois opinions différentes.

Dans un deuxième temps, nous chercherons la présence du chaos au sein d'un modèle de type Ising. Nous analyserons plusieurs graphiques en fonction de la variation de certains paramètres pour voir quand le chaos fait son apparition. Nous introduirons également l'effet appelé "smallworld".

Abstract

The main goal of this final thesis is the study of opinion dynamic formation process in a population divided in small groups of discussion (fixed or random size).

Results of this study could be used in a near future to perform improved prediction of the opinion evolution (elections, reform proposition, etc) within a population to avoid tremendous surprises caused by a swing in public opinion, as it has already been seen in several countries.

In a first time, we will analyze different opinion models established by S. Galam. We will see models where the population has the choice between two opinions. In that case the study is based on the discussion groups' size and on the opinion's evolution within these groups. After that, we will study the case where people can choose between three different opinions.

In a second time, we will look for the presence of the chaos in an Ising model. We will study several graphics in function of some parameters variations to see when the chaos appears. We will also introduce the "smallworld" effect.

Table des matières

Préface	5
I Quatre modèles d'opinion de S. Galam.	7
1 Un premier modèle : groupes de taille fixe	8
1.1 Introduction	8
1.2 Définition du modèle	11
1.3 Le cas de base : le groupe de taille trois	13
1.4 Le cas du doute : le groupe de taille quatre	18
1.5 Application pour les groupes de taille 4	26
1.6 Conclusion	28
2 Deuxième modèle : groupes de tailles aléatoires	29
2.1 Adaptation du modèle	29
2.2 Simulations	32
2.3 Conclusion	38
3 Troisième modèle : système à trois possibilités de choix	39
3.1 Introduction	39
3.2 Description du modèle	41
3.3 Points fixes et diagrammes de flux	43
3.4 Remarques et conclusion	51
4 Effets déterministes des choix contrariants	53
4.1 Introduction	53
4.2 Description du modèle	55
4.3 Conclusion	63
II Recherche : modèle de type Ising	64
5 Anticonformisme dans un modèle d'opinion	65
5.1 Introduction	65
5.2 Description du modèle	68

5.3	Présence du chaos dans le champ moyen	71
5.4	Connectivité à longue distance : "Smallworld"	77
5.5	Conclusion	81
Conclusion générale		83
Annexe		85

Préface

L'étude de la dynamique des opinions est un sujet relativement récent, qui intervient dans la vie sociale de tous les jours, dès qu'il s'agit de donner son avis sur une opinion quelconque. Que ce soit un avis sur l'interdiction de fumer dans les lieux de restauration, une proposition de réforme à accepter ou non, des élections,...

La géométrie de la vie sociale fait en sorte que les gens concernés discutent entre eux, par petits groupes, autour d'une tasse de café, au travail, à la maison, dans la rue,... Des groupes se forment donc et les avis s'échangent, et bien souvent, c'est la majorité qui l'emporte. Mais ce n'est pas toujours le cas ! Le scientifique S. Galam a donc analysé plusieurs modèles de dynamiques des opinions publiques et c'est le sujet principal de ce mémoire.

Ce mémoire est constitué de deux parties : la première va être consacrée à l'étude de quatre modèles [4]. Le premier d'entre eux est un modèle où les personnes ont le choix entre deux opinions possibles (ce choix sera en général le fait d'accepter ou non une proposition de réforme) [2] [3]. Ce premier chapitre contient toutes les bases sur lesquelles les 3 chapitres suivants vont se reposer, et traite du cas simple où les groupes de discussion qui se forment sont de taille fixe. Nous verrons le cas de base avec les groupes de trois personnes et le cas où le doute commence à faire son apparition avec les groupes de taille 4. Dans le chapitre 2, nous aborderons un modèle où les groupes de discussion seront de tailles aléatoires, pouvant aller de 2 jusqu'à 5 ou 6 personnes par groupes [5]. Le chapitre 3 présente un modèle différent des deux précédents, car cette fois, la population a le choix entre trois opinions différentes et non plus deux [6]. Le dernier chapitre revient au modèle à deux choix, avec seulement les groupes de trois personnes et il fait intervenir un nouveau paramètre que l'on appellera les "contrariants", qui sont des personnes prenant l'avis opposé des autres personnes du groupes [7].

La deuxième partie de ce mémoire est quant à elle consacrée à la recherche. J'ai pu réaliser ce chapitre lors de mon stage à l'Université de Florence au sein de l'équipe du chercheur F. Bagnoli. Nous avons cherché le chaos dans des modèles d'opinion à une dimension et pour cela nous avons travaillé avec un modèle de type Ising [9], [10], [11], [12], [13], [14]. Il s'agit d'un modèle très proche du modèle de S. Galam. Dans un premier temps nous avons analysé la dynamique lorsqu'on prend les plus proches voisins et dans un deuxième temps nous avons travaillé avec l'"effet smallworld" qui consiste à prendre de façon aléatoire des connectivités (voisins) à plus longue distance.

Première partie

Quatre modèles d'opinion de
S. Galam.

Chapitre 1

Un premier modèle : groupes de taille fixe

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous allons considérer un modèle d'opinion avec seulement deux possibilités de choix : soit les personnes qui sont en faveur d'une certaine proposition de réforme soit les opposants. L'étude de la dynamique des opinions ne va pas être réalisée directement sur l'ensemble total de la population mais via de petits groupes de discussion entre plusieurs personnes. La dynamique opère via des mises à jour locales au sein de ces groupes de personnes avec une règle de majorité. Nous allons dans un premier temps analyser les groupes de taille fixe et nous verrons plus particulièrement les groupes de discussion constitués de trois et quatre personnes. Et dans le chapitre suivant, nous étudierons l'évolution des groupes de personnes dont la distribution des tailles est aléatoire, c'est-à-dire qu'il y aura des groupes allant de deux à cinq ou six personnes.

Chaque mise à jour va conduire le système vers un nouvel état et on répète ce schéma jusqu'au moment où il n'apparaît plus de changement collectif au sein d'un groupe.

Ensuite nous construirons un diagramme de phase comme étant une fonction des probabilités locales. Nous verrons alors que deux phases différentes peuvent être obtenues : d'un côté nous aurons un état d'équilibre final, c'est-à-dire lorsque l'ensemble de la population a une majorité très claire en faveur d'une seule opinion (pour ou contre la proposition de réforme) ; la deuxième phase obtenue est une coexistence des deux opinions, en proportions égales.

Nous verrons que, dans certains cas, une situation d'ex-aequo entre les deux opinions pourrait apparaître au sein d'un groupe local. Dans ce cas, le choix résultant est l'une ou l'autre opinion avec des probabilités locales i contre la réforme et $(1 - i)$ pour la réforme, où i représente la croyance commune correspondant à la classe socio-culturelle. La valeur de i est constante dans chacune des classes avec $0 \leq i \leq 1$ mais peut varier d'une classe à l'autre.

Afin de mieux visualiser cela, considérons une classe quelconque avec une croyance commune i et des groupes de discussion de quatre personnes. La lettre O dénote les opposants à la question en jeu et S les partisans. Dans ce cas, les règles de mise à jour s'écrivent comme suit :

$$SSSS \text{ et } OSSS \rightarrow SSSS; OOOO \text{ et } OOOS \rightarrow OOOO,$$

$$OOSS \rightarrow \begin{cases} OOOO \text{ avec probabilité } i, \\ SSSS \text{ avec probabilité } (1 - i) \end{cases}$$

où toutes les permutations sont autorisées.

Pour $0 \leq i \leq 1$, la dynamique de flux d'opinion converge toujours vers une totale polarisation de la population mais la localisation du séparateur est une fonction dépendant de i et de la taille des groupes. Cette localisation peut varier de 0 % à 100 % comme montré à la figure 1.1 ci-dessous.

Le flux est rapide et monotone. Lorsque la majorité initiale gagne, on est dans une situation de démocratie, sinon il s'agit plus ou moins d'une situation de dictature dépendant de la valeur de la minorité initiale qui éventuellement s'étend dans toutes les classes. Plusieurs situations sociales extrêmes peuvent être décrites. Lorsque $i = 0$, une proposition de réforme a besoin d'un support initial de plus de 90 % de la population pour survivre au débat public. Par contre, lorsque $i = 1$, une rumeur initiale fausse, partagée par seulement un petit pourcentage de la population, pourrait s'étendre à toute la population. De plus, on verra que de petites fluctuations dans les conditions initiales peuvent engendrer des résultats très différents.

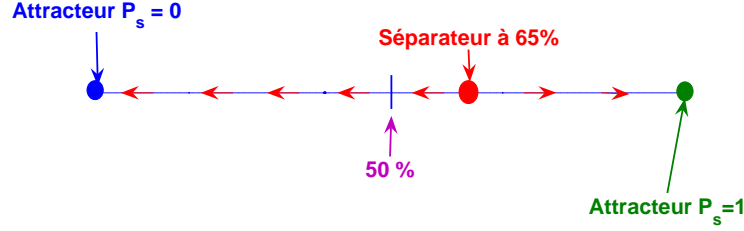


FIG. 1.1 – Diagramme du flux d'opinion montrant les deux attracteurs en 0 et 1 et le séparateur situé à une valeur non symétrique de 65%. Pour survivre à un débat public, une opinion doit débiter avec un support initial de plus de cinquante pourcents tandis que l'autre opinion a besoin d'un support initial minoritaire.

On peut déjà trouver ce genre de dynamique dans l'étude des votes dans les systèmes hiérarchiques démocratiques. Dans ce cas, les groupes de personnes votent pour un représentant d'un niveau plus élevé en utilisant une règle de majorité locale. Un tel système de hiérarchisation s'établit en fait de la même manière qu'un processus de formation d'opinion en termes d'équations et de dynamique. A la place de voter, toutes les personnes d'un groupe vont mettre à jour leur opinion. La probabilité d'élire un représentant à un certain niveau de hiérarchie n est équivalent à la proportion de gens partageant une opinion après n mises à jour.

Dans la section suivante, nous allons définir le modèle en question. Ce dernier sera alors résolu pour les groupes de taille 3 et 4 dans les sections suivantes.

1.2 Définition du modèle

Nous commençons en partitionnant une population donnée, constituée de différentes classes socio-culturelles. Par la suite nous considérerons chaque classe de façon indépendante afin de pouvoir étudier la dynamique des opinions se formant au sein de ses N membres individuels faisant face à une certaine question. Cela peut être une proposition de réforme, un changement de comportement comme arrêter de fumer, prendre une décision politique étrangère ou encore croire en une certaine rumeur.

Choisissons une classe de N personnes à un temps t , avant qu'elles ne débattent de la question en jeu. Ces personnes doivent par exemple décider si oui ou non elles acceptent une proposition de réforme. Elles ont donc le choix entre deux opinions que nous noterons : S et O . Les proportions de départ de la population pour ces deux opinions sont respectivement $p_S(t)$ et $(p_O(t) = 1 - p_S(t))$. Lors de chaque mise à jour, des groupes de personnes vont se former au hasard. Pour les groupes de taille k , j personnes partagent l'opinion S et $(k - j)$ sont contre la proposition. Tous les membres du groupe adoptent l'opinion S avec une probabilité $m_{k,j}$ et l'opinion O avec une probabilité $(1 - m_{k,j})$. Il s'agit des probabilités locales qui définissent, pour tout groupe de taille k , les différents taux de transition pour toutes les configurations possibles vers des états polarisés, respectivement $+...+$ et $-...-$.

A partir de cette configuration initiale, les gens vont commencer à discuter du projet. Toutefois, ils ne se rencontrent pas en tout temps et jamais tous ensemble à la fois. Les rassemblements sont formés par la géométrie de la vie sociale dans des espaces physiques comme les bureaux, les maisons, les bars, les restaurants,... Cette géométrie détermine le nombre de gens qui se rencontrent dans un lieu donné. Habituellement c'est de l'ordre de seulement quelques-uns.

Après une mise à jour, la proportion $p_S(t + 1)$ de trouver au hasard une personne partageant l'opinion S s'écrit :

$$p_S(t + 1) = P_k\{p_S(t)\} = \sum_{j=0}^k m_{k,j} C_j^k p_S(t)^j [1 - p_S(t)]^{k-j}, \quad (1.1)$$

où $C_j^k \equiv \frac{k!}{j!(k-j)!}$ sont les coefficients binomiaux.

Alors que des discussions peuvent avoir lieu par chance, la plupart sont gérées par des temps réguliers de rencontres, tels que la pause de midi, le verre après le boulot,... Lors de chaque rencontre, les personnes se retrouvent avec des personnes différentes (amis, collègues,...) à différents endroits de leur espace social (bureau, voisinage, ville,...). Donc ces rassemblements ont lieu dans des séquences de temps amenant chacune une nouvelle discussion locale. Durant ces rencontres, toutes les personnes sont supposées être impliquées dans un seul groupe de discussion. Cela signifie que, en moyenne, une personne donnée prend part à une discussion dans un groupe de taille k .

On considère ici un monde parfait, à savoir qu'aucun avantage n'est accordé à la minorité, que ce soit avec des groupes de pressions ou avec des stratégies organisées. De plus, le pouvoir de persuasion individuel est identique des deux côtés avec le principe "une personne - un argument".

Considérons par exemple un groupe de cinq personnes avec, au départ trois personnes favorables à la réforme et deux contre. Ce groupe va converger vers cinq personnes qui seront en faveur du projet de réforme. A l'inverse, si on a deux personnes pour au départ, cela mène à cinq personnes contre au final. Si le groupe est de taille paire, il y a une absence temporaire de la majorité locale, le groupe doute.

Dans la section suivante, nous allons appliquer ce modèle pour des groupes de taille fixe, à savoir, dans un premier temps, des groupes de trois personnes.

1.3 Le cas de base : le groupe de taille trois

Dans cette section, nous allons travailler avec des groupes de taille fixe contenant trois personnes ($k = 3$). Nous allons donc utiliser l'équation (1.1). Nous allons également considérer des opinions symétriques, ce qui implique que

$$m_{3,j} = 1 - m_{3,3-j}.$$

Nous allons poser que $m_{3,3} = 1$ et par symétrie on obtient $m_{3,0} = 0$. On va pouvoir développer l'équation (1.1) et on obtient :

$$\begin{aligned} p_S(t+1) &= \sum_{j=0}^k m_{k,j} C_j^k p_S(t)^j [1 - p_S(t)]^{(k-j)} \\ &= m_{3,0} C_0^3 p_S(t)^0 [1 - p_S(t)]^3 + m_{3,1} C_1^3 p_S(t) [1 - p_S(t)]^2 \\ &+ m_{3,2} C_2^3 p_S(t)^2 [1 - p_S(t)] + m_{3,3} C_3^3 p_S(t)^3 [1 - p_S(t)]^0 \\ &= 3 m_{3,1} p_S(t) [1 - p_S(t)]^2 + 3 m_{3,2} p_S(t)^2 [1 - p_S(t)] + p_S(t)^3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nous allons voir que cette équation possède trois points fixes, c'est-à-dire lorsque $p_S(t+1) = p_S(t)$, et ces derniers se trouvent en 0, 1 et $\frac{1}{2}$. On peut le vérifier : si $p_S(t+1) = p_S(t)$ alors on obtient :

$$\begin{aligned} p_S(t) &= 3m_{3,1}p_S(t)[1 - p_S(t)]^2 + 3m_{3,2}p_S(t)^2[1 - p_S(t)] + p_S(t)^3 \\ &\Leftrightarrow \\ p_S(t)^3 &+ 3m_{3,2}p_S(t)^2[1 - p_S(t)] + 3m_{3,1}p_S(t)[1 - p_S(t)]^2 - p_S(t) = 0. \end{aligned}$$

On trouve alors, en mettant $p_S(t)$ en évidence, notre premier point fixe : $p_S(t) = 0$. Après avoir simplifié par $p_S(t)$, il reste :

$$p_S(t)^2 + 3m_{3,2}p_S(t)[1 - p_S(t)] + 3m_{3,1}[1 - p_S(t)]^2 - 1 = 0.$$

Le terme $p_S(t)^2 - 1$ peut se réécrire comme suit : $(p_S(t) - 1)(p_S(t) + 1)$, on a alors :

$$(p_S(t) - 1)(p_S(t) + 1) + 3m_{3,2}p_S(t)[1 - p_S(t)] + 3m_{3,1}[1 - p_S(t)]^2 = 0.$$

On trouve alors, en mettant $(p_S(t) - 1)$ en évidence, notre deuxième point fixe : $p_S(t) = 1$. Après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned} p_S(t)(-1 + 3m_{3,2} - 3m_{3,1}) + 3m_{3,1} - 1 &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ p_S(t) &= \frac{1 - 3m_{3,1}}{(-1 + 3m_{3,2} - 3m_{3,1})}. \end{aligned}$$

Par symétrie, nous avons $m_{3,2} = 1 - m_{3,1}$, et donc

$$p_S(t) = \frac{1 - m_{3,1}}{2 - 6m_{3,1}} = \frac{1}{2}.$$

Les deux premiers points fixes correspondent à une totale polarisation des opinions, respectivement un total désaccord à la proposition de réforme ou un support total. Il s'agit d'attracteurs tandis que le troisième point fixe est, quant à lui, un séparateur avec un partage parfaitement équilibré des opinions, comme nous pouvons le voir sur la figure 1.2 ci-dessous.

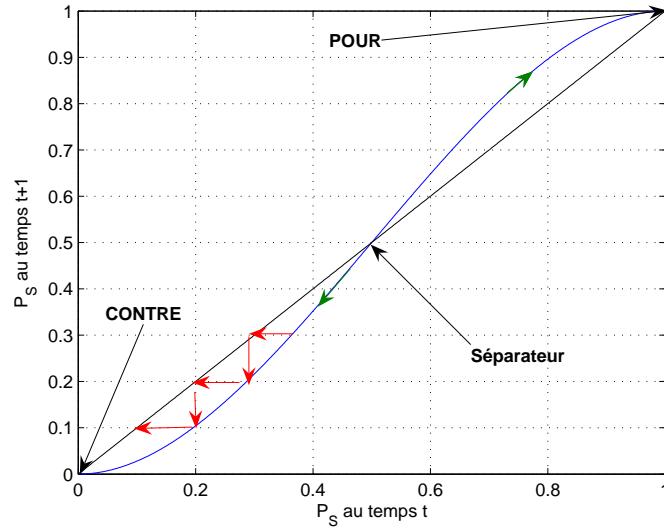


FIG. 1.2 – Graphique montrant la variation de la proportion $p_S(t + 1)$ des supporters à la proposition de réforme comme fonction de $p_S(t)$ pour les groupes de trois personnes. Les flèches indiquent le flux pour un support initial $p_S(t) < \frac{1}{2}$.

Pour atteindre un attracteur, la dynamique requiert un nombre suffisant de mises à jour. Plus concrètement, chaque mise à jour indique un temps réel mesuré comme un certain "nombre de jours".

Pour l'illustration 1.2, on a démarré avec une proportion initiale de 45% de personnes favorables à la réforme, notons le $p_S(t) = 0.45$. Successivement, on obtient :

- $p_S(t + 1) = 0.42$,
- $p_S(t + 2) = 0.39$,
- $p_S(t + 3) = 0.34$,
- $p_S(t + 4) = 0.26$,
- $p_S(t + 5) = 0.17$,
- $p_S(t + 6) = 0.08$,
- $p_S(t + 7) = 0.02$,
- $p_S(t + 8) = 0.00$.

On voit qu'en moins de 8 mises à jour successives, 45% des personnes qui étaient en faveur de la proposition de réforme ont changé d'avis. Le processus a préservé et renforcé la majorité initiale. La dynamique est parfaitement symétrique par rapport aux deux opinions, comme nous pouvons le voir sur les figures 1.2 et 1.3.

Le graphe suivant nous montre l'évolution des personnes favorables à la proposition de réforme après une douzaine de mises à jour. La courbe noire représente l'égalité parfaite entre les deux opinions et ne change pas dans le temps. La courbe rouge a une majorité de 52% de supporters à la réforme au commencement et ce pourcentage ne fait qu'augmenter au fil du temps. Quand à la courbe bleue, il s'agit au départ d'une minorité de 48% en faveur de la réforme et on voit qu'après 12 mises à jour, tout le monde s'est opposé à la réforme.

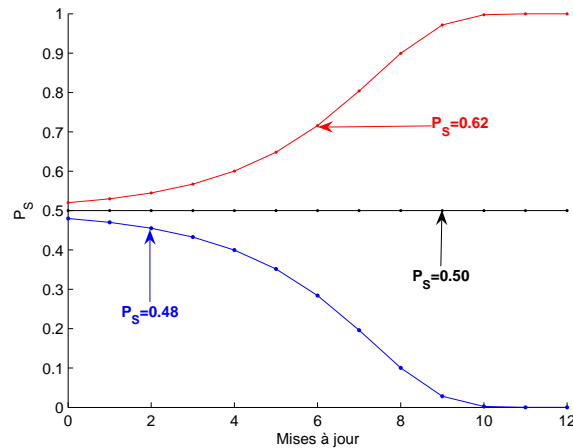


FIG. 1.3 – Graphique montrant la variation de $p_S(t)$ pour les groupes de taille 3 comme fonction des mises à jour répétées avec les trois supports initiaux $p_S(t) = 0.48, 0.50, 0.52$.

Pour dessiner le graphe 1.2, on avait posé $m_{3,2} = 1$ et donc par symétrie $m_{3,1} = 0$. Nous allons maintenant réaliser une nouvelle simulation où cette fois nous allons faire varier la valeur de $m_{3,2}$.

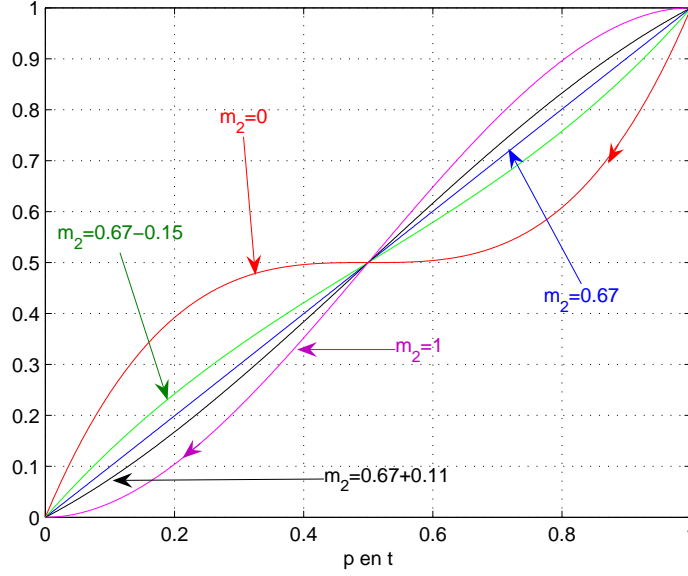


FIG. 1.4 – Graphique montrant la variation du flux dynamique comme une fonction de $m_{3,2}$.

On remarque que la transition de phase, pour le point fixe $p_S(t) = p_S(t+1)$, a lieu pour une valeur de $m_{3,2}$ qui vaut $\frac{2}{3}$ (courbe bleue). En effet, en se basant sur les calculs réalisés précédemment pour trouver les points fixes et en utilisant la symétrie, on va montrer pour quelle valeur de $m_{3,2}$, il n'y a pas de changement d'opinion à l'itération suivante :

$$p_S(t)^3 + 3m_{3,2}p_S(t)^2[1 - p_S(t)] + 3(1 - m_{3,2})p_S(t)[1 - p_S(t)]^2 - p_S(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p_S(t)^3(4 - 6m_{3,2}) + p_S(t)^2(9m_{3,2} - 6) + p_S(t)(2 - 3m_{3,2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4 - 6m_{3,2} = 0 \\ 9m_{3,2} - 6 = 0 \\ 2 - 3m_{3,2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m_{3,2} = \frac{2}{3}.$$

Pour cette valeur de $m_{3,2}$, après la mise à jour, aucun changement d'avis n'a été effectué. Nous avons donc fait varier $m_{3,2}$ autour de cette valeur de transition. Lorsqu'on se rapproche de la valeur 1 (courbes mauve et noire), il y a un phénomène d'expansion de l'opinion majoritaire à l'étape suivante. Lorsqu'on s'approche de zéro (courbes rouge) cette fois nous avons une expansion de l'opinion minoritaire.

On voit donc que selon la valeur que prend la probabilité $m_{3,2}$, différents phénomènes peuvent se produire.

1.4 Le cas du doute : le groupe de taille quatre

Dans cette section, nous travaillons toujours avec des groupes de taille fixe mais cette fois il s'agit de groupes formés de quatre personnes.

Ce n'est que lorsqu'on travaille avec des groupes de taille paire que les croyances communes conduites par une certaine tendance peuvent être analysées. Dans ce cas-ci, la règle "une personne - un argument" tient compte de la possibilité d'un ex-aequo sans aucune règle de majorité locale. Dans un tel cas, les participants se trouvent dans un état où ils ne savent pas prendre de décision. Tout le groupe doute, les deux opinions étant partagées de manière égale parmi les différents membres du groupe.

Nous évoquons alors un croyance commune, appelée "principe d'inertie", pour dissiper le doute. Lors d'une situation d'ex-aequo entre les deux opinions, le groupe adopte l'opinion O avec une probabilité $m_{4,2}$ (qui correspond à la probabilité i dont on a parlé dans l'introduction) et l'opinion S avec une probabilité $(1 - m_{4,2})$ où $m_{4,2}$ représente la tendance collective.

Nous allons maintenant adapter le modèle à cette situation, en considérant dans un premier temps une situation symétrique ce qui implique que dans ce cas $m_{4,2} = \frac{1}{2}$. Reprenons l'équation (1.1) et écrivons la probabilité de trouver une personne en faveur de la réforme après une mise à jour :

$$\begin{aligned}
 p_S(t+1) &= \sum_{j=0}^k m_{k,j} C_j^k p_S(t)^j [1 - p_S(t)]^{(k-j)} \\
 &= m_{4,0} C_0^4 p_S(t)^0 [1 - p_S(t)]^4 + m_{4,1} C_1^4 p_S(t) [1 - p_S(t)]^3 \\
 &+ m_{4,2} C_2^4 p_S(t)^2 [1 - p_S(t)]^2 + m_{4,3} C_3^4 p_S(t)^3 [1 - p_S(t)] \\
 &+ m_{4,4} C_4^4 p_S(t)^4 [1 - p_S(t)]^0 \\
 &= m_{4,0} [1 - p_S(t)]^4 + 4 m_{4,1} p_S(t) [1 - p_S(t)]^3 + 3 p_S(t)^2 [1 - p_S(t)]^2 \\
 &+ 4 m_{4,3} p_S(t)^3 [1 - p_S(t)] + m_{4,4} p_S(t)^4.
 \end{aligned}$$

Nous allons poser $m_{4,4} = 1$ ce qui implique par symétrie que $m_{4,0} = 0$ et ensuite nous allons montrer que nous avons les mêmes trois points fixes que pour les groupes de taille 3, à savoir 0, 1 et $\frac{1}{2}$. En posant $p_S(t+1) = p_S(t)$, on obtient :

$$p_S(t)^4 + 4m_{4,3}p_S(t)^3[1-p(t)] + 3p_S(t)^2[1-p_S(t)]^2 + 4m_{4,1}p_S(t)[1-p_S(t)]^3 - p_S(t) = 0.$$

On trouve donc facilement notre premier point fixe : $p_S(t) = 0$. Après une simplification par $p_S(t)$ et une réécriture du terme $p_S(t)^3 - 1$ en $(p_S(t) - 1)(p_S(t)^2 + p_S(t) + 1)$, on trouve le deuxième point fixe : $p_S(t) = 1$. Par symétrie des probabilités $m_{k,j}$ on obtient dès lors :

$$p_S(t)(-6 + 8m_{4,3}) + 3 - 4m_{4,3} = 0 \Rightarrow p_S(t) = \frac{1}{2}.$$

Ci-dessous, nous avons un graphe montrant la variation du flux dynamique comme une fonction dépendant de $m_{4,3}$.

On remarque que la transition de phase, pour le point fixe $p_S(t) = p_S(t+1)$, a lieu pour $m_{4,3} = \frac{3}{4}$ (courbe bleue). Durant cette mise à jour, on voit donc qu'aucun changement d'opinion n'a été effectué. Nous avons donc fait varier la valeur du paramètre $m_{4,3}$ aux alentours de 0.75. Les flèches sur le graphe indiquent la direction du flux. On constate que lorsqu'on se rapproche de la valeur 1 (courbes noire et mauve), il y a un phénomène d'expansion de l'opinion majoritaire à l'étape suivante. Par contre, lorsqu'on s'éloigne de 0.75 et qu'on se rapproche de zéro, nous voyons une expansion de l'opinion minoritaire. Dans ce cas, il y a donc un léger retournement de situation.

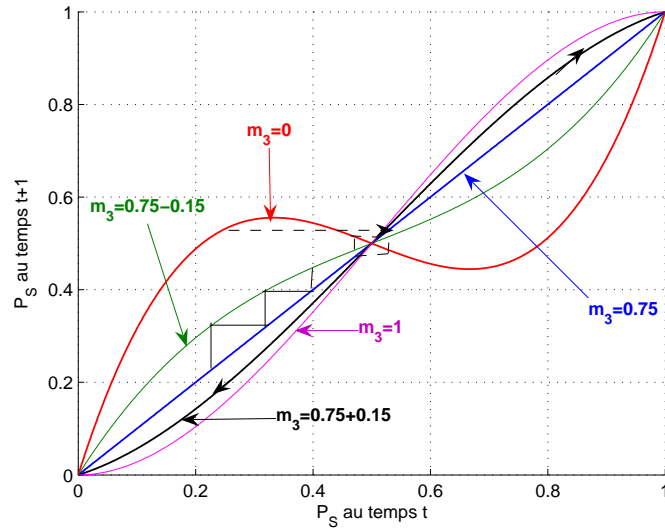


FIG. 1.5 – Graphique montrant la variation du flux dynamique comme une fonction de $m_{4,3}$.

Sur ce graphique on constate que lorsque $\frac{3}{4} < m_{4,3} \leq 1$, les courbes mauve et noire, les points 0 et 1 sont stables, autrement dit ce sont des attracteurs et $\frac{1}{2}$ est instable, soit un séparateur. En conséquence, toute proportion initiale de S plus petite (plus grande) que la moitié converge vers 0 (1) avec une polarisation de la population vers l'opinion moins (plus). Le flux est rapide et monotone.

Une autre façon de vérifier la stabilité de ces points fixes est de calculer les dérivées de cette fonction en ces 3 points.

Définition 1.4.1 *Un point fixe est **stable** si le module de la dérivée de la transformation en ce point est strictement inférieur à 1 :*

$$\left| \frac{df}{dx}(x_0) \right| < 1 \Rightarrow x_0 \text{ est un point stable.}$$

*Un point fixe est **instable** si le module de la dérivée de la transformation en ce point est strictement supérieur à 1 :*

$$\left| \frac{df}{dx}(x_0) \right| > 1 \Rightarrow x_0 \text{ est un point instable.}$$

Posons $m_{4,3} = 1$, ce qui implique par symétrie que $m_{4,1} = 0$, on obtient donc comme équation :

$$p_S(t+1) = 3p_S(t)^2(1-p_S(t))^2 + 4p_S(t)^3(1-p_S(t)) + p_S(t)^4.$$

Si on dérive cette équation, on obtient :

$$\frac{d p_S(t+1)}{d p_S(t)} = p'_S(t+1) = -6p_S(t)^2 + 6p_S(t).$$

Regardons le module de cette dérivée aux trois points fixes 0, 1 et $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} |p'_S(0)| &= 0 < 1 \Rightarrow 0 \text{ est un point fixe stable,} \\ |p'_S(1)| &= 0 < 1 \Rightarrow 1 \text{ est un point fixe stable,} \\ |p'_S(\frac{1}{2})| &= \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ est un point fixe instable.} \end{aligned}$$

Cependant, lorsque $m_{4,3} < \frac{3}{4}$ (courbes verte et rouge), la dynamique est inversée. Le précédent séparateur $\frac{1}{2}$ devient alors l'unique attracteur. Toute proportion initiale de S et de O converge de façon collective vers une même coexistence des deux opinions à la fois. Toutefois, les dynamiques locales restent actives avec des agents gardant des opinions partagées. On se trouve dans une phase qui est en opposition avec la phase de polarisation où la dynamique locale s'arrêterait lorsqu'elle avait atteint un des deux attracteurs.

Nous pouvons effectuer la même vérification pour la stabilité des points fixes. Cette fois, posons $m_{4,3} = 0$ et donc par symétrie : $m_{4,1} = 1$. On obtient donc :

$$p_S(t+1) = 4p_S(t)(1-p_S(t))^3 + 3p_S(t)^2(1-p_S(t))^2 + p_S(t)^4.$$

Si on dérive cette équation, on obtient :

$$p'_S(t+1) = 18p_S(t)^2 - 18p_S(t) + 4.$$

Regardons le module de cette dérivée aux trois points fixes 0, 1 et $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} |p'_S(0)| &= 4 > 1 \Rightarrow 0 \text{ est un point fixe instable,} \\ |p'_S(1)| &= 4 > 1 \Rightarrow 1 \text{ est un point fixe instable,} \\ |p'_S(\frac{1}{2})| &= |-\frac{1}{2}| < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ est un point fixe stable.} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant analyser le **cas non-symétrique** où la probabilité à l'étape $t + 1$ d'avoir une situation d'ex-aequo est $1 - m_{4,2}$. On obtient alors l'équation suivante (avec $m_{4,4} = 1$ et $m_{4,3} = 1$) :

$$p_S(t+1) = p_S(t)^4 + 4p_S(t)^3(1 - p_S(t)) + 6(1 - m_{4,2})p_S(t)^2(1 - p_S(t))^2. \quad (1.3)$$

A partir de cette équation, on retrouve les deux attracteurs trouvés précédemment : $p_S = 0$ et $p_S = 1$. Cependant, le point fixe instable p_c est maintenant passé de la valeur symétrique $\frac{1}{2}$ à la valeur non symétrique :

$$p_c = \frac{(6m_{4,2} - 5) + \sqrt{13 - 36m_{4,2} + 36m_{4,2}^2}}{6(2m_{4,2} - 1)}, \quad (1.4)$$

excepté en $m_{4,2} = \frac{1}{2}$ où $p_c = \frac{1}{2}$. En effet, après avoir obtenu les deux premiers points fixes, nous obtenons l'équation suivante :

$$-p_S(t)^2 - p_S(t) - 1 + 4p_S(t)^2 + 6(1 - m_{4,2})p_S(t)(1 - p_S(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p(t)^2(-3 + 6m_{4,2}) + p(t)(5 - 6m_{4,2}) - 1 = 0.$$

En calculant les racines de cette équation, nous trouvons la valeur souhaitée.

Le graphe 1.6 ci-après montre la variation de p_c comme une fonction de $m_{4,2}$. L'effet des croyances communes de l'ensemble de la population sur la formation de l'opinion publique associée se voit de façon explicite. Par exemple, un support initial de $p_S = 0.40$ mène à une polarisation de la population en faveur de la proposition de réforme pour toutes les valeurs de la tendance $m_{4,2}$ telles que $0 \leq m_{4,2} \leq 0.36$. D'un autre côté, on aura une polarisation contre la proposition de réforme lorsque $0.36 \leq m_{4,2} \leq 1$.

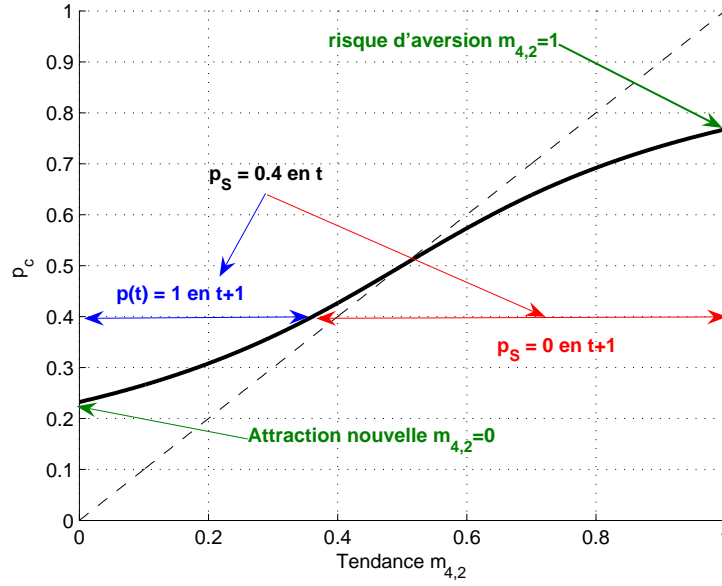


FIG. 1.6 – Graphique montrant la variation de p_c comme une fonction de $m_{4,2}$. Pour un risque d'aversion collectif ($m_{4,2} = 1$), $p_c \approx 0.77$ tandis que pour une attraction collective nouvelle ($m_{4,2} = 0$), $p_c \approx 0.23$. Un support initial $p(t) = 0.4$ mène à une situation d'extrémisme en faveur de la réforme lorsque $0 \leq m_{4,2} \leq 0.36$. Nous avons la situation inverse lorsque $0.36 \leq m_{4,2} \leq 1$.

Lorsque le groupe partage un haut risque d'aversion, c'est-à-dire une situation d'ex-aequo, on voit par exemple que $m_{4,2} = 1$ ce qui donne $p_c \approx 0.77$. Le support initial à la proposition de réforme doit donc débiter avec plus de 77 % comme montré aux figures 1.7 et 1.8.

D'un autre côté, un problème, dans un contexte où le changement est préféré, conduit à un état de non-décision pour adopter l'opinion S rendant $m_{4,2} = 0$ avec $p_c \approx 0.23$. Un support initial de plus de 23 % est maintenant suffisant pour polariser l'ensemble de la population. Les flux dynamiques associés sont montrés sur les graphes de droites des figures 1.7 et 1.8.

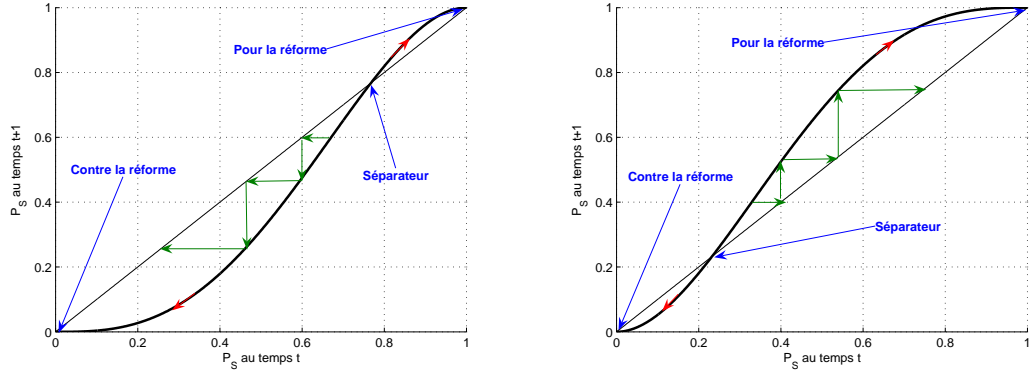


FIG. 1.7 – Graphiques montrant la variation de $p_S(t+1)$ comme une fonction de $p_S(t)$. A gauche, $m_{4,2} = 1$ ce qui donne $p_c \approx 0.77$. Les flèches indiquent la direction du flux pour un support initial $p(t) < 0.77$. A droite, $m_{4,2} = 0$ ce qui donne $p_c \approx 0.23$. Les flèches indiquent la direction du flux pour un support initial $p(t) > 0.23$.

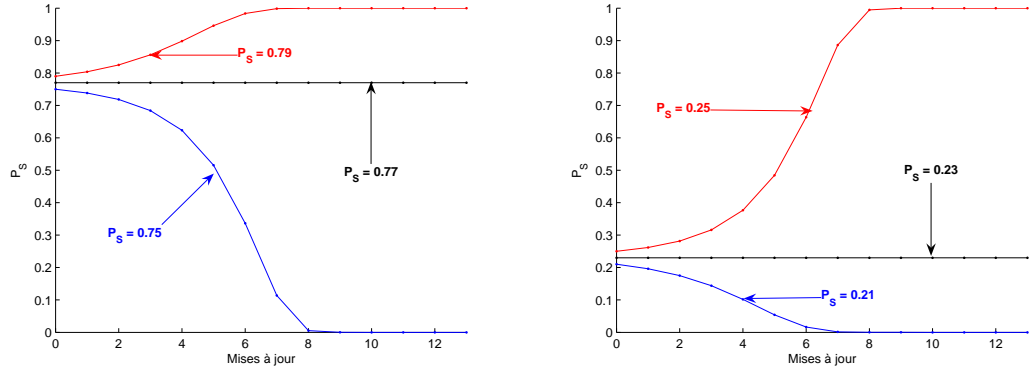


FIG. 1.8 – Graphiques montrant la variation de $p_S(t)$ comme une fonction des mises à jour répétées. A gauche, $m_{4,2} = 1$ avec trois supports initiaux $p_S(t) = 0.75, 0.7, 0.79$. Pour être en faveur de la réforme il faut un support initial de plus de 77%. A droite, $m_{4,2} = 0$ avec trois supports initiaux $p_S(t) = 0.21, 0.23, 0.25$. Dans ce cas une minorité initiale de plus de 23% est suffisante pour faire changer d'avis la majorité, il y a un retournement de situation.

Sur le graphe ci-dessous¹, on voit que dans le cas des groupes de taille quatre, le nombre de mises à jour nécessaires pour atteindre une polarisation complète est plus petit que pour les groupes de taille trois pour les cas $m_{4,2} = 1$ et $m_{4,2} = 0$. Le nombre de mises à jour requis pour avoir une polarisation complète de la population peut s'évaluer de la manière suivante [4] :

$$n \simeq \frac{1}{\ln[\lambda]} \ln \left[\frac{p_c - p_S}{p_c - p_+(t)} \right], \quad (1.5)$$

où λ est la dérivée première de la fonction $p_S(t+1)$ par rapport à $p_S(t)$ prise en $p_S(t) = p_c$. De plus, $p_S = 0$ si $p_+(t) < p_c$ et $p_S = 1$ lorsque $p_+(t) > p_c$. Le nombre de mises à jour diverge en p_c . La situation est symétrique par rapport à $m_{4,2} = 0$ et $m_{4,2} = 1$ avec la divergence se situant en $p_c = 0.23$ et $p_c = 0.77$ respectivement. Cette dernière a lieu en $p_c = 0.50$ pour les groupes de trois personnes.

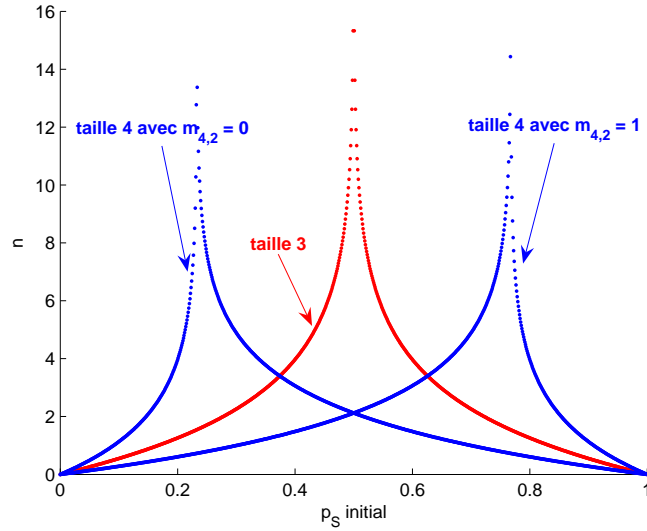


FIG. 1.9 – Graphiques montrant la variation du nombre de mises à jour requises pour atteindre une polarisation totale pour les groupes de taille 3 (courbe rouge) et les groupes de taille 4 (courbes bleues), avec $m_{4,2} = 0$ et 1.

¹Cfr Code Matlab dans Annexe

Par exemple, commençons comme au-dessus avec les groupes de taille 3 au point $p_S(t) = 0.45$, nous obtenons alors avec $k = 1$ les séries :

- $p_S(t + 1) = 0.24$,
- $p_S(t + 2) = 0.05$ et
- $p_S(t + 3) = 0.00$.

En moins de trois mises à jour successives, 45% des supporters initiaux à la proposition de réforme ont changé d'opinion pour se retourner contre le projet de réforme. Même un support initial au-delà de 50% avec $p_S(t) = 0.70$ donne :

- $p_S(t + 1) = 0.66$,
- $p_S(t + 2) = 0.57$,
- $p_S(t + 3) = 0.42$,
- $p_S(t + 4) = 0.20$,
- $p_S(t + 5) = 0.03$ et
- $p_S(t + 6) = 0.00$.

Six mises à jour seulement sont suffisantes pour avoir 70% des personnes qui étaient favorables à la proposition de réforme qui changent d'opinion.

1.5 Application pour les groupes de taille 4

Restons pour le moment avec des groupes de 4 personnes et faisons une petite application afin d'observer de petites fluctuations et des opinions publiques contradictoires dans des régions pourtant similaires.

Par exemple, considérons une ville et ses banlieues. D'un côté nous avons la ville avec $m_{4,2} = 0.49$ et de l'autre ses banlieues avec $m_{4,2} = 0.47$. Une différence aussi petite ne se ressent pas de façon explicite lorsque nous passons d'un côté à l'autre. Les deux régions sont perçues de façon tout à fait identique. Cependant, nous verrons que l'étude de la dynamique des opinions, commençant avec les mêmes conditions initiales dans les deux régions, montre que parfois de grandes différences peuvent être observées alors qu'il y a seulement des petites différences dans les conditions initiales.

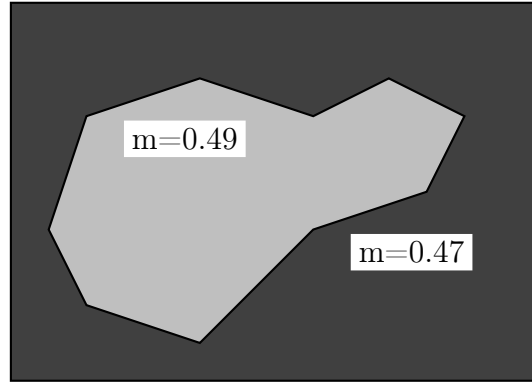


FIG. 1.10 – Une ville avec $m_{4,2} = 0.49$ et ses banlieues environnantes avec $m_{4,2} = 0.47$.

Pour illustrer cela, considérons deux conditions initiales très proches : respectivement 51 % et 49 % des supports parmi la population de la ville et de ses banlieues. Nous regarderons ensuite les dynamiques des flux d'opinions correspondantes.

Dans le premier cas, on a 51 % de supporteurs pour la proposition de réforme dans les deux régions et cela conduit à un accord total pour la réforme. Ceci rend les deux régions géographiques identiques, comme on peut le voir à la figure 1.11. On obtient un accord complet après une estimation de 10 mises à jour.

Cependant, une légère baisse de 2 % dans le support initial, descendu à 49 %, divise les deux régions. Dorénavant, la population de la ville est totalement opposée à la proposition de réforme tandis que les banlieues ne changent pas d'avis avec un accord total pour la réforme.

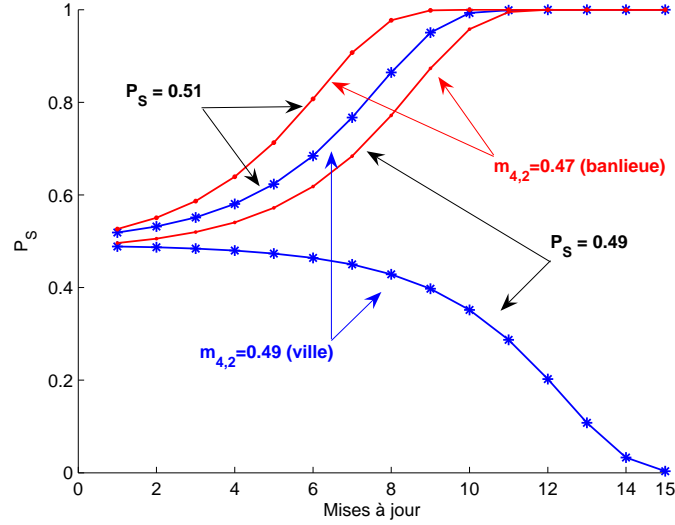


FIG. 1.11 – Graphique montrant l'évolution de $p_S(t)$ comme une fonction dépendant des mises à jour avec $m_{4,2} = 0.49$ et $m_{4,2} = 0.47$. Deux supports initiaux sont considérés. Pour $p_S = 0.51$ on obtient pour les deux régions une totale polarisation. Mais pour $p_S = 0.49$, seulement les banlieues sont totalement d'accord avec la réforme alors que la ville s'y oppose.

La situation que nous venons d'illustrer éclaire les situations dans lesquelles des sentiments ou des opinions contradictoires sont soutenus dans des régions qui sont malgré tout très similaires. Nous pouvons citer par exemple le sentiment de sécurité. Cela montre comment un changement insignifiant, soit dans le support initial soit dans la tendance ($m_{4,2}$) des croyances communes, peut amener de fortes différences dans le résultat d'une opinion publique.

1.6 Conclusion

Pour conclure ce chapitre, jusqu'à présent nous avons présenté un modèle relativement simple qui est capable de reproduire certaines complexités de la réalité sociale. Il suggère que la direction de l'effet inhérent à la polarisation dans la formation d'une opinion publique, menée par un débat démocratique, est biaisée par l'existence de croyances communes parmi la population.

Pour l'instant ce modèle n'a été appliqué qu'au cas des groupes de personnes de taille fixe. Dans un premier temps nous avons étudié la formation de groupes de trois personnes. Dans ce cas, la règle de majorité l'emporte à chaque fois. Dans un second temps nous avons étudié la formation des groupes de quatre personnes. C'est là qu'est apparue une certaine complexité du modèle avec l'arrivée du doute, la situation d'ex-aequo et le fait qu'une minorité initiale pour la proposition de réforme arrive à faire changer d'avis la majorité pour, au final, avoir une polarisation totale de la population en faveur de la réforme. Par la suite, nous allons appliquer ce modèle pour des groupes de tailles aléatoires, allant de deux à cinq ou six personnes.

On peut faire remarquer que toutefois, dans la vie réelle, tout le monde n'est pas ouvert d'esprit ou prêt à changer d'avis. Il serait dès lors intéressant d'introduire dans ce modèle des personnes ayant une opinion bien tranchée et étant obstinées. Le modèle peut se généraliser à un large spectre de phénomènes sociaux, politiques et économiques qui impliquent les effets de propagation. En particulier, il pourrait voir sous un nouveau jour les processus de propagation de la peur et des rumeurs.

Chapitre 2

Deuxième modèle : groupes de tailles aléatoires

2.1 Adaptation du modèle

Dans ce deuxième chapitre, nous allons reprendre le même modèle d'opinion mais cette fois nous n'allons plus travailler avec des groupes de discussion de taille fixe mais avec des groupes de tailles aléatoires, variant de 2 à 5 ou 6 personnes par groupes. Pour cela nous allons devoir modifier le modèle vu au chapitre précédent afin de l'adapter à cette situation.

Nous reprenons les configurations initiales du premier modèle et selon une certaine vie sociale, nous allons avoir un aménagement géométrique local aléatoire caractérisé par une probabilité de distribution pour un ensemble de tailles $\{a_i\}$. Dans ce cas, nous dirons qu'une personne donnée prend part à une discussion dans un groupe de taille i , avec le plus grand groupe étant de taille L , avec une probabilité a_i qui satisfait la contrainte suivante :

$$\sum_{i=1}^L a_i = 1, \quad (2.1)$$

où $i = 1, 2, \dots, L$ représente les tailles de groupes respectives $1, \dots, L$ avec L étant le groupe le plus grand.

Cette fois-ci encore, aucun avantage n'est accordé à la minorité et le pouvoir de persuasion est identique des deux côtés. Le principe "une personne - un argument" est utilisé pour implémenter le processus de la mise à jour collective. Sur base de cela, la règle de majorité locale va déterminer l'issue de la discussion. Les personnes d'un groupe vont adopter l'opinion de la majorité initiale locale.

Dans ce modèle, en cas de situation d'ex-aequo, le groupe ne bouge plus et décide de ne plus bouger, c'est-à-dire que le groupe entier se retourne contre la proposition de réforme afin de préserver la situation existante. Par exemple, un groupe de six personnes avec au début trois personnes en faveur de la réforme et trois personnes contre, cela donnera six personnes en opposition à la réforme. Il est intéressant de remarquer que ceci n'est pas un avantage donné à la minorité en termes d'être plus convainquante. Il s'agit d'un résultat collectif qui provient d'un état de doute.

Rappelons que nous travaillons avec une classe constituée de N personnes au total, ayant le choix d'accepter ou non une certaine proposition de réforme. Dans ce modèle, à un temps t antérieur à toute discussion, la proportion initiale de personnes en faveur de la réforme se note $N_+(t)$ et la proportion de personnes qui sont contre celle-ci se note $N_-(t)$. Chaque personne est toujours supposée n'avoir qu'une opinion, ce qui donne

$$N_+(t) + N_-(t) = N.$$

Les probabilités individuelles associées pour être pour ou contre la proposition de réforme sont donc :

$$P_{\pm}(t) \equiv \frac{N_{\pm}(t)}{N},$$

avec

$$P_+(t) + P_-(t) = 1.$$

La probabilité d'avoir, après une mise à jour, un groupe en faveur de la réforme devient :

$$P_+(t+1) = \sum_{k=1}^L a_k \sum_{j=N[\frac{k}{2}]+1}^k C_j^k P_+(t)^j [1 - P_+(t)]^{k-j}, \quad (2.2)$$

où $N[\frac{k}{2} + 1] \equiv$ la partie entière de $(\frac{k}{2} + 1)$. Simultanément,

$$P_-(t+1) = \sum_{k=1}^L a_k \sum_{j=N[\frac{k}{2}]}^k C_j^k P_-(t)^j [1 - P_-(t)]^{k-j}. \quad (2.3)$$

Avec le temps, les mêmes personnes vont se rencontrer à plusieurs reprises, de façon aléatoire, dans une même configuration de rassemblement. Lors de chaque nouvelle rencontre, elles discutent localement de la question en jeu et elles changent d'avis selon la règle de majorité.

Afin de pouvoir suivre l'évolution dans le temps du nombre de gens favorables à la proposition de réforme, l'équation (2.2) est itérée jusqu'au moment où une valeur stable soit atteinte. On obtient alors un flux monotone en direction d'un ou deux points fixes stables, que nous noterons $P_{+N} = 0$ et $P_{+Y} = 1$, il s'agit des deux points fixes stables trouvés au chapitre précédent. Le flux ainsi que sa direction sont donnés par le point fixe instable P_c qui se trouve entre les deux points fixes stables. Sa valeur dépend à la fois de l'ensemble $\{a_i\}$ et de la taille du plus grand groupe, L . Nous l'appellerons le point de confiance.

Pour tout support initial à la proposition de réforme strictement inférieur à la valeur du point de confiance, nous aurons, à un temps $t + n$, une convergence vers un refus de la proposition de réforme et inversement. Cela donne :

$$P_+(t) < P_c \Rightarrow \exists n \text{ tel que } P_+(t + n) = P_{+N} = 0,$$

tandis que

$$P_+(t) > P_c \Rightarrow \exists m \text{ tel que } P_+(t + m) = P_{+Y} = 1.$$

Les nombres n et m mesurent le temps requis pour atteindre une opinion finale qui est stable. Il s'agit soit d'un "grand oui" à la proposition de réforme en $P_{+Y} = 1$ ou d'un "grand non" en $P_{+N} = 0$. Ces valeurs respectives dépendent de $\{a_i\}$, L et de la proportion initiale de personnes favorables à la proposition de réforme, à savoir $P_+(t)$.

On constate donc que des discussions locales répétées conduisent l'ensemble de la population vers une polarisation complète avec un "grand oui" à la proposition de réforme ou un "grand non". En conséquence, l'opinion publique n'est pas versatile. Cela se stabilise assez rapidement (n et m étant habituellement des nombres assez petits) vers une position claire.

2.2 Simulations

La figure 2.1 ci-dessous montre la variation de la proportion de gens en faveur de la réforme après une mise à jour, $P_+(t+1)$, comme une fonction de $P_+(t)$ pour deux ensembles particuliers de $\{a_i\}$.

Le premier d'entre eux est : $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.2$ et $a_5 = a_6 = 0.1$ où la taille du plus grand groupe de personnes est donc $L = 6$ (courbe bleue sur le graphe). Dans ce cas-ci, $P_c = 0.74$, ce qui entraîne que la valeur initiale de personnes en faveur de la réforme doit être à une valeur élevée de plus de 74 %. Simultanément, une minorité initiale de plus de 26% est suffisante pour avoir un refus complet à la fin.

Le second ensemble est $a_1 = 0$, $a_2 = 0.1$ et $a_3 = 0.9$, on a donc $L = 3$ et dans ce cas $P_c = 0.56$ (courbe verte). Ici la situation est plus mitigée mais aussi peu réaliste puisque il n'est pas rare d'avoir souvent des formations de groupes de discussion de deux personnes, ces groupes de deux sont donc en général plus nombreux que juste 10 %.

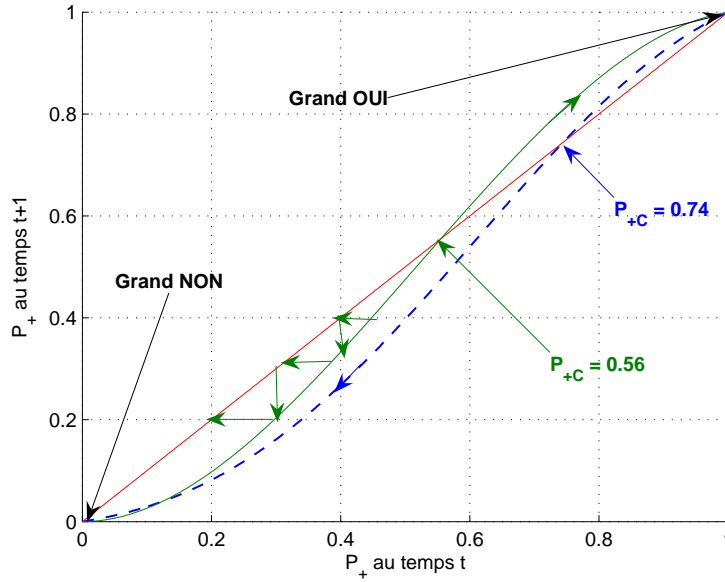


FIG. 2.1 – Graphe montrant la variation de $P_+(t+1)$ en fonction de $P_+(t)$. La courbe en pointillés bleus représente le premier ensemble $\{a_i\}$ avec $P_c = 0.74$. La courbe verte représente le second ensemble $\{a_i\}$ avec $P_c = 0.56$. Les flèches indiquent la direction du flux.

Vérifions la valeur du point de confiance $P_c = 0.56$ pour le second ensemble $\{a_i\}$. Pour cela utilisons l'équation (2.2) :

$$\begin{aligned}
P_+(t+1) &= \sum_{k=1}^L a_k \sum_{j=N[\frac{k}{2}+1]}^k C_j^k P_+(t)^j [1 - P_+(t)]^{k-j} \\
&= a_1 C_1^1 P_+(t) + a_2 C_2^2 P_+(t)^2 + a_3 [C_2^3 P_+(t)^2 (1 - P_+(t)) \\
&\quad + C_3^3 P_+(t)^3] \\
&= -1.8P_+(t)^3 + 2.8P_+(t)^2.
\end{aligned}$$

Il faut que $P_+(t+1) = P_+(t)$, ce qui implique :

$$\begin{aligned}
&-1.8P_+(t)^3 + 2.8P_+(t)^2 - P_+(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} P_+(t) = 0 \\ -1.8P_+(t)^2 + 2.8P_+(t) - 1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Et la deuxième de ces équations a pour solutions : $P_+(t) = 1$ et $P_c = 0.56$.

Nous allons maintenant illustrer de façon quantitative la dynamique du refus. Pour cela, considérons le premier ensemble $\{a_i\}$ et prenons comme valeur initiale $P_+(t) = 0.70$ au temps t . Les séries en temps associées sont :

- $P_+(t+1) = 0.68,$
- $P_+(t+2) = 0.66,$
- $P_+(t+3) = 0.63,$
- $P_+(t+4) = 0.58,$
- $P_+(t+5) = 0.51,$
- $P_+(t+6) = 0.41,$
- $P_+(t+7) = 0.27,$
- $P_+(t+8) = 0.14,$
- $P_+(t+9) = 0.05,$
- $P_+(t+10) = 0.01,$
- $P_+(t+11) = 0.00.$

On voit donc que onze cycles de discussion sont suffisants pour faire changer d'avis les 70% de personnes initialement en faveur de la proposition de réforme et rejoindre ainsi la minorité initiale des 30 % d'opposants. Sur base d'une moyenne d'une discussion par jour, il suffit donc de moins de deux semaines pour avoir un NON total contre la proposition de réforme. De plus, on constate qu'une majorité contre la réforme apparaît déjà en moins de 6 jours. Ceci est illustré sur le graphe 2.2 ci-après (courbe 1).

Si on décide de changer légèrement les paramètres, en prenant cette fois $a_1 = 0.2, a_2 = 0.3, a_3 = 0.2, a_4 = 0.2, a_5 = 0.1$ et $a_6 = 0$ et en prenant $P_c = 0.85$, une valeur plus élevée que précédemment, on constate que ceci rend relativement impossible tout projet de réforme. En effet, comment une proposition de réforme réaliste pourrait-elle déjà débiter avec plus de 85 % de la population en sa faveur ?

Cette fois-ci, en démarrant avec $P_+(t) = 0.70$, le nombre de discussions locales est passé de 11 à 9 jours. En moins de 10 itérations, la population entière s'est retournée contre la proposition de réforme pour la refuser. Les 30 % initiaux d'opposants à la réforme sont passés à plus de 50 % en moins de quatre jours, comme on peut le voir à la figure ci-dessous (courbe 2).

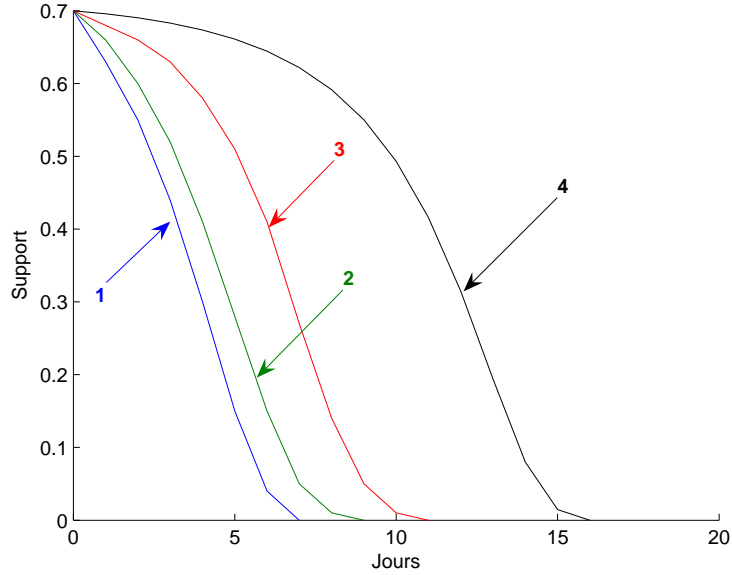


FIG. 2.2 – Graphe montrant la variation de $P_+(t)$ comme une fonction des jours successifs, avec $L = 6$. La valeur initiale prise en $t = 1$ est $P_+(1) = 0.70$. Pour la courbe bleue (1) : $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = a_5 = a_6 = 0$ avec $P_c = 1$. Pour la courbe verte (2) : $a_1 = 0.2, a_2 = 0.3, a_3 = 0.2, a_4 = 0.2, a_5 = 0.1$ et $a_6 = 0$ avec $P_c = 0.85$. Pour la courbe rouge (3) : $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.2, a_5 = a_6 = 0.1$ avec $P_c = 0.74$. Pour la courbe noire (4) : $a_1 = 0, a_2 = 0.3, a_3 = 0.7, a_4 = a_5 = a_6 = 0$ avec $P_c = 0.71$.

C'est l'existence d'un point fixe instable entre les deux autres points fixes stables qui amène cet effet de dynamique de polarisation totale de la population. Les points fixes stables, P_{+Y} et P_{+N} , sont constants et indépendants de l'ensemble $\{a_i\}$, par contre le point instable P_c varie en fonction de la taille des groupes de discussion mais également en fonction de la distribution $\{a_i\}$.

Afin de choisir la contribution spécifique de chaque taille de rassemblement par rapport à l'effet total, nous devons déterminer le point fixe instable pour les tailles de groupes allant de deux à six personnes. Ces valeurs sont indiquées dans la table ci-dessous :

Taille	PFS	PFI	PFS
	Total de non P_{+N}	Point de confiance P_c	Total de oui P_{+Y}
2	0	1	aucun
3	0	$\frac{1}{2}$	1
4	0	$\frac{1+\sqrt{13}}{6} \approx 0.77$	1
5	0	$\frac{1}{2}$	1
6	0	≈ 0.65	1

TAB. 2.1 – Table représentant les valeurs des différents points fixes pour chaque groupe allant de la taille deux à la taille six. PFS \equiv Point Fixe Stable et PFI \equiv Point Fixe Instable.

Nous voyons que le flux est identique pour tous les groupes de taille impaire avec un point fixe instable situé en $\frac{1}{2}$. De l'autre côté, pour les groupes de taille paire, le point fixe instable démarre en un pour les groupes de deux personnes et décroît jusqu'à la valeur 0.65 pour la taille six, en passant par la valeur 0.77 pour les groupes de taille quatre. Souvenons-nous que ce calcul du point fixe instable a déjà été effectué dans le chapitre précédent pour les groupes de taille fixe. Cette valeur provient donc de l'équation (1.4), avec $m_{4,2} = 1$:

$$p_c = \frac{(6 m_{4,2} - 5) + \sqrt{13 - 36 m_{4,2} + 36 m_{4,2}^2}}{6(2 m_{4,2} - 1)}.$$

Afin d'illustrer l'interaction dynamique entre les groupes de taille paire et ceux de taille impaire, détaillons le cas hypothétique des groupes restreints à seulement deux et trois personnes. Posons donc $a_1 = a_4 = \dots = a_L = 0$, l'équation (2.2) se réduit donc à :

$$\begin{aligned} P_+(t+1) &= \sum_{k=1}^L a_k \sum_{j=N[\frac{k}{2}+1]}^k C_j^k P_+(t)^j [1 - P_+(t)]^{k-j} \\ &= a_2 P_+(t)^2 + (1 - a_2) [P_+(t)^3 + 3P_+(t)^2(1 - P_+(t))], \end{aligned}$$

dont les points fixes stables sont toujours 0 et 1 avec le point fixe instable situé en

$$P_c = \frac{1}{2(1 - a_2)}.$$

En effet, en cherchant les points fixes ($P_+(t+1) = P_+(t)$), on obtient :

$$\begin{aligned} P_+(t)^3(-2 + 2a_2) + P_+(t)^2(3 - 2a_2) - P_+(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} P_+(t) = 0 \\ P_+(t)^2(-2 - 2a_2) + P_+(t)(3 - 2a_2) - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En cherchant les racines de cette dernière équation, on trouve la valeur souhaitée.

Pour $a_2 = 0$, c'est-à-dire lorsqu'on considère seulement les groupes de trois personnes, on retrouve $P_c = \frac{1}{2}$, comme nous l'avons calculé pour les groupes de taille fixe de trois personnes précédemment. Or ce point fixe instable vaut déjà 1 lorsque $a_2 = \frac{1}{2}$, cela montre donc que l'existence de discussion dans des groupes de taille paire produit un effet radical sur l'apparition du doute qui, à son tour, amène une propagation massive du refus à la proposition de réforme. Dorénavant, seulement quelques jours sont suffisants pour obtenir un rejet total envers la réforme.

Si on regarde la courbe 1, en bleu, sur le graphe 2.2, on voit immédiatement que le nombre de personnes en faveur de la réforme chute de façon très rapide. Un peu plus de deux jours sont nécessaires pour faire changer d'avis la majorité et pour faire en sorte qu'elle se retourne contre la proposition de réforme, alors qu'il y avait au départ un support de 70 %. Sept jours plus tard, la proposition est complètement rejetée et il ne reste plus la moindre personne en sa faveur.

Considérons maintenant la quatrième courbe, où il n'y a seulement que 30 % de groupes de deux personnes, la chute est plus lente certes mais après seize jours nous aboutissons au même résultat avec un refus de la réforme.

Un nombre très grand de combinaisons de l'ensemble $\{a_i\}$ est possible. Cependant, l'existence de ces doutes temporaires locaux qui, au bout du compte, amène une forte polarisation vers un refus social est toujours préservée. Il est dès lors important de notifier que, dans des situations de la vie réelle, tout le monde n'est pas disposé à changer d'avis. Une certaine fraction de la population gardera toujours son opinion, peu importe ce qu'il pourrait se passer. Inclure cet effet dans notre modèle ne changera pas les résultats de manière qualitative. Dans ce cas, le processus de polarisation ne sera plus total et les deux points fixes stables oscilleront entre des valeurs respectivement plus grandes et plus petites que zéro et un.

2.3 Conclusion

Avant de conclure ce chapitre, nous allons donner quelques exemples de la vie réelle auxquels ce modèle s'est appliqué.

Nous pouvons entre autres citer certains événements relatifs à l'Union Européenne qui créèrent une surprise générale. Depuis le début de la construction de l'UE, il n'y avait jamais eu de grands débats publics organisés dans la plupart des pays impliqués. Le processus entier était dirigé par les décisions du gouvernement, bien que la plupart des gens semblait toujours en accord avec sa construction. En même temps, les personnes s'opposant à la constitution de l'Europe faisaient pression pour qu'il y ait des débats publics. Un tel mouvement semblait légèrement absurde étant donné que l'on pensait alors qu'une majorité des gens était en faveur de l'UE. Mais en tout cas, il en est ressorti que la plupart des gouvernements Européens furent peu enthousiastes à soutenir le référendum à ce sujet.

Un autre exemple que l'on peut encore citer est la décision, il y a quelques années, du président français Mitterand d'organiser un référendum pour accepter ou non le traité de Maastricht. Alors qu'un grand succès était attendu, le fait est que, un peu moins de cinquante pourcent des personnes requises ont donné leur accord pour le traité. En effet, il semblerait que plus les gens en discutaient entre eux et moins il y avait de gens en faveur du traité. Il est même possible de prédire que deux semaines de débats publics en plus auraient suffi à faire gagner le NON.

Nous avons donc vu que dans ce modèle, beaucoup de choses dépendent de la valeur que prend le point de confiance P_{+C} . En effet, même si il y a une majorité initiale en faveur d'une proposition de réforme mais que celle-ci est inférieure à la valeur du point de confiance, alors c'est la minorité initiale, qui était contre la réforme, qui va polariser la population toute entière et provoquer un retournement de situation. Bien entendu la valeur du point de confiance dépend de la distribution des différentes tailles de groupes de discussion.

Chapitre 3

Troisième modèle : système à trois possibilités de choix

3.1 Introduction

Dans ce nouveau chapitre, nous allons travailler avec un nouveau modèle d'opinion, toujours basé sur le modèle établi par S. Galam. Cette fois nous nous intéressons seulement aux groupes de taille 3 ($k = 3$) et le changement a lieu dans le fait que la population a le choix entre trois opinions différentes, que nous noterons A, B et C.

On voit immédiatement que, dans ce modèle, il y aura également la possibilité d'avoir une situation d'ex-aequo : lorsque chaque membre du groupe de discussion a un avis différent. Nous introduirons alors les probabilités α, β et $(1 - \alpha - \beta)$ afin de résoudre cette situation d'ex-aequo en faveur de l'opinion A, B et C, respectivement. Une situation d'ex-aequo (A, B, C) mènera donc à trois mises à jour différentes, qui sont :

- (A, A, A) avec une probabilité α ,
- (B, B, B) avec une probabilité β et
- (C, C, C) avec une probabilité $(1 - \alpha - \beta)$.

Nous verrons que, dans ce modèle, un état de polarisation peut toujours être atteint en peu d'itérations. Nous verrons également qu'il est possible de résoudre le système (pour des valeurs données de α et β), en associant à chaque distribution d'opinion initiale la valeur de l'opinion qui éventuellement prévaut sur les deux autres. Nous pourrons dès lors réaliser des diagrammes de phase, manifestant des lignes de séparation de phase et des points fixes.

En particulier, nous montrerons que dans certaines circonstances une opinion minoritaire, initialement très petite, peut polariser le système tout entier.

Dans la section 2, nous allons définir le modèle de Galam pour un système à trois choix et nous en donnerons les équations d'évolution de base. Les points fixes ainsi que les flux de ces équations et diagrammes de phase seront abordés dans la section 3.

3.2 Description du modèle

Nous considérons à nouveau une population constituée de N individus ayant le choix entre trois opinions : A, B ou C. Nous posons $k = 3$ et travaillons donc avec des groupes de discussions de trois personnes. Dans ce cas, il y a donc possibilité d'une situation d'ex-aequo lorsque les trois individus ont une opinion différente. Nous supposons que cette situation peut être favorisée vers l'une des trois opinions et nous introduisons donc les probabilités α, β et $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ en faveur de l'opinion gagnante A, B ou C respectivement.

Nous noterons $p_A(t)$, la proportion de personnes en faveur de l'opinion A au temps t ; $p_B(t)$, la proportion de personnes en faveur de l'opinion B au temps t et $p_C(t) = 1 - p_A(t) - p_B(t)$, la proportion de personnes en faveur de l'opinion C au temps t . Ceci peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \frac{N_A(t)}{N}, \\ p_B(t) &= \frac{N_B(t)}{N}, \\ p_C(t) &= \frac{N_C(t)}{N}, \end{aligned}$$

avec

$$p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) = 1.$$

Donc, par exemple, l'opinion A prévaut dans un groupe de trois personnes dans chacun de ces cas :

1. Tous trois ont déjà l'opinion A, ce qui a lieu avec probabilité p_A^3 ;
2. Deux individus sur trois partagent l'opinion A, ce qui a lieu avec probabilité $3 p_A^2 (1 - p_A)$;
3. Il y a une situation d'ex-aequo résolue en faveur de l'opinion A, ce qui a lieu avec probabilité $6 \alpha p_A p_B (1 - p_A - p_B)$.

Une analyse similaire peut être effectuée pour p_B . Nous obtenons les équations d'évolution suivantes pour les fractions p_A et p_B :

$$p_A(t+1) = p_A^3(t) + 3p_A^2(t)(1 - p_A(t)) + 6\alpha p_A(t)p_B(t)(1 - p_A(t) - p_B(t)); \quad (3.1)$$

et

$$p_B(t+1) = p_B^3(t) + 3p_B^2(t)(1 - p_B(t)) + 6\beta p_A(t)p_B(t)(1 - p_A(t) - p_B(t)). \quad (3.2)$$

L'état du système peut être représenté de façon pratique par un point dans un triangle équilatéral. Soit \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} les sommets d'un tel triangle, dans ce cas, l'état défini par les probabilités p_A, p_B et $p_C = 1 - p_A - p_B$ est représenté par le point

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= p_A \mathbf{A} + p_B \mathbf{B} + p_C \mathbf{C} \\ &= \mathbf{C} + p_A \overline{\mathbf{CA}} + p_B \overline{\mathbf{CB}},\end{aligned}\tag{3.3}$$

où $\overline{\mathbf{CA}}$ et $\overline{\mathbf{CB}}$ sont les vecteurs reliant le point \mathbf{C} à \mathbf{A} et \mathbf{B} respectivement.

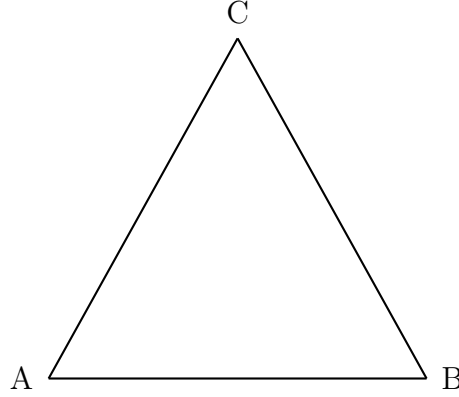


FIG. 3.1 – Représentation du système.

Les sommets du triangle représentent les états polarisés. Il s'agit, au regard des équations (3.1) et (3.2), d'états fixes et stables. Chaque sommet représente ainsi un bassin d'attraction non vide.

Rappelons les définitions d'attracteur et de bassin d'attraction :

Définition 3.2.1 *Un **attracteur** est un ensemble compact de l'espace de phase, invariant par le flot et vers lequel toutes les trajectoires environnantes convergent.*

Définition 3.2.2 *Un **bassin d'attraction** est l'ensemble de tous les points dont les trajectoires convergent vers l'attracteur.*

On peut donc voir que si, par exemple, $\frac{1}{2} < p_A(t) < 1$, on obtient $p_A(t+1) > p_A(t)$. Le bassin d'attraction de \mathbf{A} contient donc au moins la région $p_A > \frac{1}{2}$.

3.3 Points fixes et diagrammes de flux

Les équations (3.1) et (3.2) possèdent les points fixes suivants :

1. Les points fixes triviaux A, B et C correspondant aux états polarisés ;
2. Lorsqu'une des trois fractions p_A, p_B ou p_C disparaît, les équations d'évolution se réduisent au modèle de Galam à deux possibilités de choix, vu dans les chapitres précédents. Supposons par exemple que c'est la proportion p_C qui disparaisse, les équations deviennent alors :

$$p_A(t+1) = p_A(t)^3 + 3p_A(t)^2(1 - p_A(t))$$

et

$$p_B(t+1) = p_B(t)^3 + 3p_B(t)^2(1 - p_B(t)).$$

On voit bien qu'on retombe sur les équations du modèle à deux opinions. Les points fixes correspondants sont les points D ($p_A = \frac{1}{2}, p_B = \frac{1}{2}$), E ($p_B = \frac{1}{2}, p_C = \frac{1}{2}$) et F ($p_A = \frac{1}{2}, p_C = \frac{1}{2}$) qui se trouvent sur les côtés du triangle.

3. Il existe un septième point fixe, pour lequel les trois fractions sont différentes de zéro, et qui apparaît dans le triangle DEF. Pour que ce point existe, il faut qu'aucune des probabilités α, β et γ ne soit plus grande que $\frac{2}{3}$. En effet, prenons l'équation (3.1) comme exemple et calculons ses points fixes (il en va de même pour les autres) :

$$p_A^3(t) + 3p_A^2(t)(1 - p_A(t)) + 6\alpha p_A(t)p_B(t)(1 - p_A(t) - p_B(t)) - p_A(t) = 0$$

On trouve tout de suite la solution $p_A(t) = 0$ et il reste à résoudre l'équation suivante :

$$-2p_A^2(t) + (3 - 6\alpha p_B(t))p_A(t) - 6\alpha p_B^2 + 6\alpha p_B - 1 = 0$$

Pour chercher les racines de cette équation, nous devons calculer son delta et voir si ce dernier est positif, c'est-à-dire :

$$\Delta = (3 - 6\alpha p_B(t))^2 + 8(-6\alpha p_B^2 + 6\alpha p_B - 1) \geq 0 ?$$

Or la première partie est forcément positive, il reste donc à vérifier si

$$(-6\alpha p_B^2 + 6\alpha p_B - 1) \geq 0 ?$$

Pour réaliser l'étude de signe de cette équation, nous devons calculer le delta :

$$\Delta = 36\alpha^2 - 24\alpha \geq 0 ?$$

\Leftrightarrow

$$\alpha > \frac{2}{3}.$$

Ce raisonnement est également valable pour les quantités β et γ . Ce point G apparaît dans la région hachurée du plan (α, β) dans la figure ci-dessous.

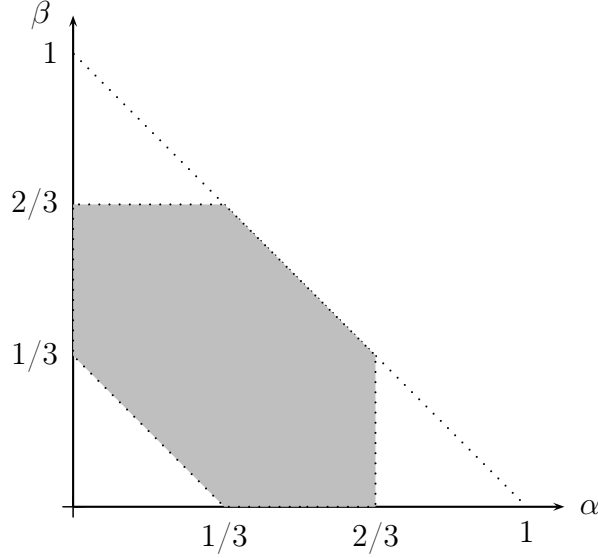


FIG. 3.2 – Graphe montrant la région hachurée, dans le plan (α, β) dans laquelle se trouve le point fixe G.

La stabilité des points fixes peut être également discutée en linéarisant les équations d'évolution autour de ces points. Si on note J la matrice Jacobienne des transformations (3.1) et (3.2), on dira qu'un point fixe est stable si toutes les valeurs propres de J sont plus petites que 1 en valeur absolue. Avant de calculer ces dernières, rappelons les définitions de matrice Jacobienne et de valeur propre.

Par facilité pour les calculs qui vont suivre, changeons la notation des équations (3.1) et (3.2), celles-ci deviennent :

$$f_1 = x_1^3 + 3x_1^2(1 - x_1) + 6\alpha x_1 x_2(1 - x_1 - x_2) \quad (3.4)$$

$$f_2 = x_2^3 + 3x_2^2(1 - x_2) + 6\beta x_1 x_2(1 - x_1 - x_2) \quad (3.5)$$

Définition 3.3.1 Soit F une fonction d'un ouvert de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m . Une telle fonction est définie par ses m fonctions composantes à valeurs réelles :

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Les dérivées partielles de ces fonctions en un point M , si elles existent, peuvent être rangées dans une matrice à m lignes et n colonnes, appelée **matrice jacobienne de F** :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Définition 3.3.2 Soit A une transformation linéaire sur \mathbb{R}^n . $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre de A** associée au vecteur $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si et seulement si

$$Ax = \lambda x.$$

On dit que x est le **vecteur propre** associé à λ .

Calcul des valeurs propres de A :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } A \Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0.$$

Dans notre cas, la matrice Jacobienne est définie par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant les valeurs des différents éléments de cette matrice Jacobienne :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 6x_1(1 - x_1) + 6\alpha x_2(1 - x_1 - x_2) - 6\alpha x_1 x_2; \\ - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 6\alpha x_1(1 - x_1 - x_2) - 6\alpha x_1 x_2; \\ - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 6\beta x_2(1 - x_1 - x_2) - 6\beta x_1 x_2; \\ - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 6x_2(1 - x_2) + 6\beta x_1(1 - x_1 - x_2) - 6\beta x_1 x_2. \end{aligned}$$

On peut maintenant vérifier que :

1. Les trois points fixes triviaux A, B et C ont tous leur valeur propre égale à zéro. Montrons-le seulement pour A, la démarche étant la même pour les deux autres. Dans ce cas on a donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$, ce qui implique, après calcul des dérivées, que la matrice Jacobienne devient :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et le calcul des valeurs propres nous donne $\lambda = 0$ ce qui est bien inférieur à 1. Il s'agit donc de trois points fixes.

2. Nous allons maintenant calculer les valeurs propres des trois points D, E et F respectivement :

- Pour le point D ($x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$), la matrice Jacobienne devient :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(1 - \alpha) & -\frac{3\alpha}{2} \\ -\frac{3\beta}{2} & \frac{3}{2}(1 - \beta) \end{pmatrix}.$$

Pour la recherche des valeurs propres, il faut résoudre $|J - \lambda I| = 0$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} \frac{3}{2}(1 - \alpha) - \lambda & -\frac{3\alpha}{2} \\ -\frac{3\beta}{2} & \frac{3}{2}(1 - \beta) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{3}{2}(1 - \alpha) - \lambda \right) \left(\frac{3}{2}(1 - \beta) - \lambda \right) - \frac{9}{4}\alpha\beta = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 + \lambda \left(-3 + \frac{3}{2}(\alpha + \beta) \right) + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}(\alpha + \beta) = 0. \end{aligned}$$

Pour chercher les racines de cette dernière équation, calculons son delta :

$$\Delta = \frac{9}{4}(\alpha + \beta)^2,$$

ce qui donne comme solutions :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2}(1 - \alpha - \beta). \end{cases}$$

- Pour le point E ($x_2 = \frac{1}{2}$ et $1 - x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$), la matrice Jacobienne devient :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{3\alpha}{2} & 0 \\ \frac{3\beta}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

On voit qu'il s'agit d'une matrice triangulaire inférieure, on peut dès lors utiliser une des propriétés des valeurs propres. Cette dernière dit :

Propriété 3.3.1 *Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses termes diagonaux.*

On obtient donc comme valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2}\alpha. \end{cases}$$

- Pour le point F ($x_1 = \frac{1}{2}$ et $1 - x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$), la matrice Jacobienne devient :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3\alpha}{2} \\ 0 & \frac{3\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

Cette fois, il s'agit d'une matrice triangulaire supérieure et la même propriété, utilisée pour le point précédent, est valable. On obtient donc comme valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2}\beta. \end{cases}$$

On constate donc que les trois points D, E et F possèdent une même valeur propre égale à $\frac{3}{2}$ et qui correspond au vecteur propre situé le long des côtés du triangle.

On constate également que la direction à l'intérieur du triangle devient instable si le paramètre de probabilité associé au sommet opposé est plus grand que $\frac{2}{3}$. Dans une telle situation, le point fixe interne G n'existe pas.

3. Le point fixe interne G, si il existe, a toutes ses valeurs absolues plus grandes que 1 en module et est donc instable.

La structure de base du flux est représentée à la figure (3.3) ci-après. Le CAS I représente la situation dans laquelle le point fixe interne G existe et le CAS II, celle où le point G n'existe pas.

A partir de là, on voit que, dans le CAS I, les bassins d'attraction des points fixes stables se rencontrent deux à deux aux points fixes D, E et F, et tous les trois se rencontrent au point interne G.

Dans le CAS II, le bassin d'attraction du point correspondant à la probabilité la plus favorable (α pour A, ...) séparera les bassins des autres points fixes au point fixe latéral situé à mi-chemin entre les deux.

Toutes les graphes qui vont suivre sont issus de l'article [6] de S. Galam.

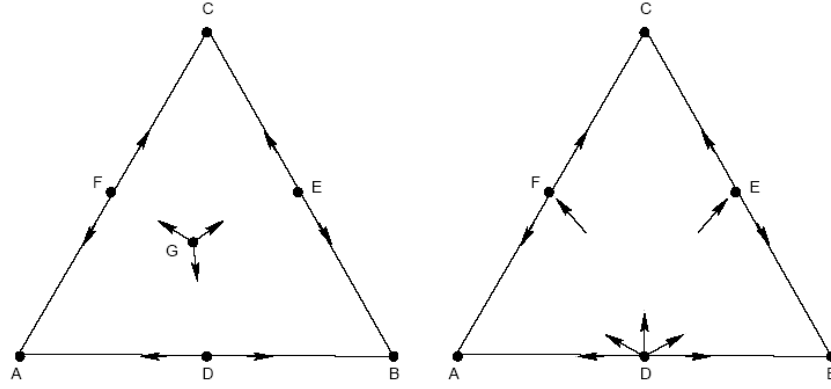


FIG. 3.3 – Graphe montrant les points fixes et la structure de base du flux. Sur la gauche, le CAS I dans lequel le couple (α, β) se trouve à l'intérieur de la région hachurée de la figure (3.2). A droite, le CAS II dans lequel le couple (α, β) se trouve à l'extérieur de cette région hachurée. Dans le cas montré : $\gamma = 1 - \alpha - \beta > \frac{2}{3}$.

Les limites de phase peuvent être localisées de façon pratique en itérant l'inverse des équations (3.1) et (3.2), en partant près des points fixes latéraux D, E ou F. Les itérations convergent alors vers le point fixe interne G, si il existe, ou vers un autre point fixe latéral pertinent. Par exemple, dans la figure ci-dessous, nous montrons le diagramme de phase obtenu pour $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6}$ respectivement. Il est clair que les bassins d'attraction des points fixes latéraux se réduisent à des parties des limites de phase : celui connectant chaque point à G, dans le CAS I, ou vers le point fixe latéral instable (comme D dans la figure de droite ci-dessous) dans le CAS II.

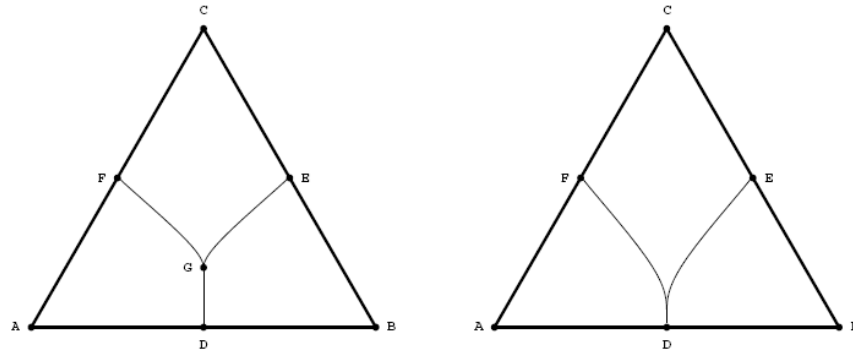


FIG. 3.4 – Diagrammes de phase. A gauche : $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ (CAS I). A droite : $\alpha = \beta = \frac{1}{6}$ (CAS II).

Les deux figures ci-dessous représentent respectivement le flux et le diagramme de phase pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$ (CAS I) et pour $\alpha = \frac{2}{9}$, $\beta = \frac{1}{9}$. On peut conclure dans le CAS II, que lorsqu'on est proche du point fixe instable, il y a la possibilité que l'opinion "préférée" (c'est-à-dire celle avec la probabilité la plus élevée permettant de sortir de la situation d'ex-aequo) puisse polariser le système même si initialement il n'y avait qu'une minorité de supporters pour cette opinion. La largeur de la zone dans le plan $\mathbf{p} = (p_A, p_B)$ où cela peut se passer disparaît rapidement lorsque \mathbf{p} s'approche du côté du triangle, puisque les deux lignes limites sont tangentes l'une par rapport à l'autre (sauf pour le cas $\alpha = \beta = 0$). Cependant, cette zone s'élargit de plus en plus vite quand la troisième opinion devient de plus en plus préférée.

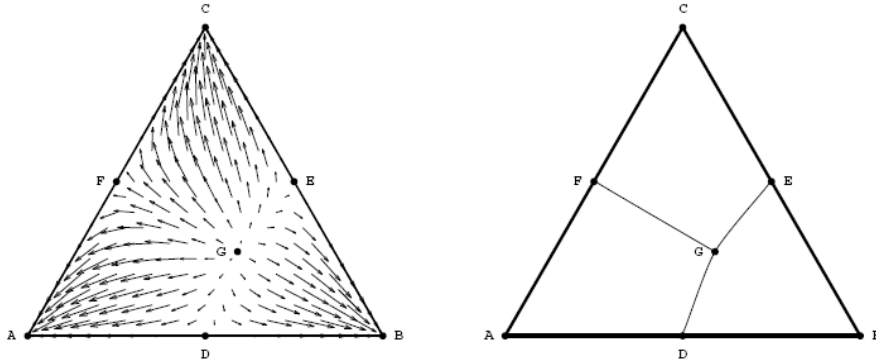


FIG. 3.5 – Flux, points fixes et bassins d'attraction pour $\alpha = \frac{4}{9}$ et $\beta = \frac{1}{9}$ (CAS I). A gauche : flux et points fixes. A droite : limites du bassin d'attraction.

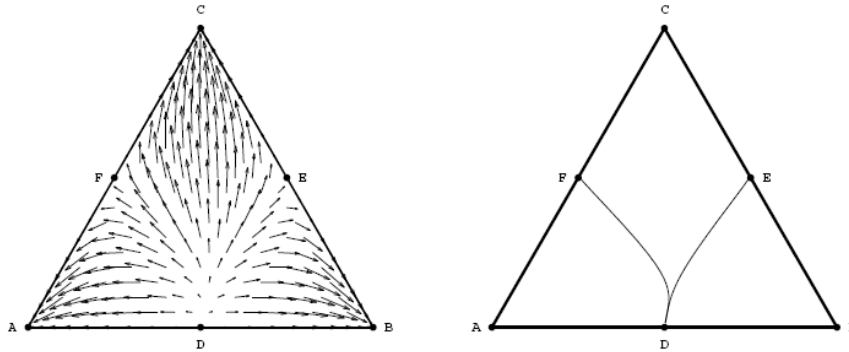


FIG. 3.6 – Flux, points fixes et bassins d'attraction pour $\alpha = \frac{2}{9}$ et $\beta = \frac{1}{9}$ (CAS II). A gauche : flux et points fixes. A droite : Limites du bassin d'attraction.

Si une des trois probabilités (par exemple β) venait à disparaître, le segment de droite $p_B = \frac{1}{2}$, reliant les points fixes latéraux D et E au sommet correspondant B, est conservé par le flux et définit la limite de son bassin d'attraction. Cela signifie que l'opinion qui n'est pas préférée peut polariser la population seulement si initialement elle est partagée par une majorité. Pour $\alpha < \frac{1}{3}$ le point fixe E est stable le long de cette ligne. Pour $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ le point fixe interne G apparaît sur la ligne, et les deux points fixes latéraux D et E sont partiellement stables. Finalement, si $\alpha > \frac{2}{3}$, le point fixe D devient partiellement stable, tandis que E devient totalement instable. Ces différents cas sont représentés sur les figures ci-dessous.

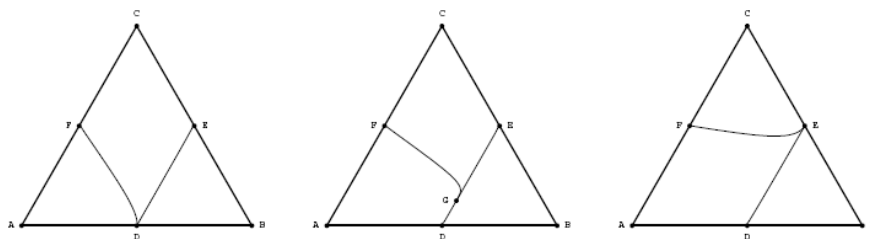


FIG. 3.7 – Diagrammes de phase avec $\beta = 0$. Le segment de droite DE ($p_B = \frac{1}{2}$) est conservé par le flux. A gauche : $\alpha = \frac{1}{10}$. Au centre : $\alpha = \frac{5}{12}$. A droite : $\alpha = \frac{5}{6}$.

3.4 Remarques et conclusion

Nous avons donc présenté une extension du modèle de Galam du système à deux choix pour un système dans lequel chaque individu a le choix entre trois opinions. Toutes les recherches ont été effectuées pour des groupes de discussion constitués de trois personnes. Afin de résoudre les situations d'ex-aequo, on a introduit deux nouveaux paramètres α , β et γ qui servent en quelque sorte d'"arguments de force". Les distributions d'opinions peuvent être visualisées de façon pratique dans un triangle équilatéral.

On a montré que, indépendamment des valeurs des paramètres, le système atteint toujours une polarisation complète après un petit nombre de cycles de discussion. Ces temps de polarisation sont virtuellement indépendants de la taille du système. Nous avons dessiné les diagrammes de phase associant à chaque condition initiale (p_A^0, p_B^0) l'opinion (A, B ou C) qui éventuellement est majoritaire.

Les résultats montrent que le système où les individus ont le choix entre trois opinions est plus complexe que celui à deux opinions. De la complexité des différents flux, on a vu que les conditions initiales ne sont pas suffisantes pour prédire des résultats puisque les valeurs des paramètres α et β contribuent à déterminer le chemin hautement non linéaire du succès ou de l'échec dans la compétition du processus de formation des opinions. Ce qui apparaît comme une stratégie gagnante pour une opinion dans les premières itérations peut s'avérer être un désastre total à la fin. A ce stade de la recherche, les indications suivantes peuvent être soulignées.

1. Il semble que nous avons ici quelques renseignements pour comprendre pourquoi les différentes tentatives, pour créer un troisième "chemin" dans les pays démocratiques ont toujours échoué. En débutant d'une situation à deux partis A-B, deux possibilités existent pour la création d'un troisième C. Soit ce dernier est créé contre A et B ou alors il est soutenu par une des deux grandes forces, disons A. Dans le premier cas, nous avons $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ rendant C plus éloigné des limites puisque de part sa nature c'est un nouvel arrivant. Dès lors, il disparaîtra plus vite. Dans le second cas, nous avons $\alpha = \beta = 0$ puisque lors d'une situation d'ex-aequo, tous les individus pour A voteront pour C. Dans ce cas, C va commencer à grandir lentement aux dépends de A et B. Pour stopper son étendue, la seule solution est d'avoir A et B qui font une coalition contre C avec $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

2. En se focalisant sur l'effet de polarisation avec l'étendue d'une opinion dans une compétition entre seulement deux opinions, il semble que la meilleure stratégie ne soit pas de la renforcer de son propre côté mais de créer à la place une troisième opinion qui coopère avec les deux opinions. Cela rend éventuellement possible la victoire de la nouvelle opinion qui est en petite minorité.

Ces nouvelles idées sont bien sur qualitatives et ont besoin d'être approfondies. Ceci n'est qu'un début de l'analyse de certaines caractéristiques de base d'un système à trois possibilités de choix. Un sujet de recherche intéressant serait de regarder le comportement des groupes de discussion avec plus de trois individus. Introduire une certaine dépendance des paramètres α et β par rapport aux valeurs des supports des opinions A et B respectivement serait également intéressant.

Chapitre 4

Effets déterministes des choix contrariants

4.1 Introduction

Dans ce nouveau chapitre, nous allons introduire, dans le modèle de S. Galam toujours, un effet appelé "choix contrariants". Nous allons donc étudier les effets de ces choix sur la formation de la dynamique des opinions.

Un contrariant est une personne qui va adopter le choix opposé à celui qui prévaut au sein du groupe, quel que soit ce choix. On reprend donc le modèle de Galam vu précédemment où la population évolue par des mises à jour de la règle de majorité locale. Après une itération, des groupes de taille donnée se forment de façon aléatoire. Ensuite, dans chacun de ces groupes, toutes les personnes adoptent l'opinion de la majorité locale. En l'absence de contrariants, le processus de répétition des mises à jour mène à un état collectif stable avec une polarisation totale de l'opinion, vers l'un des deux états A ou B . La dynamique associée est rapide et sa direction est contrôlée par un séparateur instable qui se situe à une certaine densité critique p_c des personnes supportant l'opinion A .

Dans le cas de groupes de taille impaire, on a vu que $p_c = \frac{1}{2}$, alors que ce n'est pas le cas pour les groupes de taille paire. Dans ce cas, la dynamique n'est plus symétrique, ce qui est dû à la possibilité d'avoir une situation d'ex-aequo. On a vu que dans le cas des groupes formés de 4 personnes, le séparateur instable p_c a une valeur simultanée de 23 % pour un des états et 77 % pour l'autre. Les groupes de grandes tailles atteignent plus rapidement une situation d'équilibre et le nombre correspondant de mises à jour requises diminue fortement lorsque la taille des groupes augmente.

L'introduction de contrariants dans un tel modèle, avec des groupes de tailles impaires, dévoile une polarisation totale de la dynamique produite par une règle de majorité locale à une faible densité a . L'état totalement ordonné avec une seule opinion devient un partage stable entre majorité et minorité. Le séparateur instable reste inchangé en $p_c = \frac{1}{2}$.

Cependant, à une concentration critique a_c , dont la valeur dépend de la taille du groupe, les contrariants amènent un comportement critique. Nous avons $a_c = \frac{1}{6}, 0.23, 0.30, \dots, \frac{1}{2}$ pour les groupes de taille 3, 5, 9 et infinie respectivement. Lorsque $a > a_c$, une nouvelle phase stable désordonnée est obtenue. Dans cette phase, il n'y a aucune opinion dominant l'opinion globale. Au-delà de a_c , les contrariants ont transformé le séparateur instable p_c en un unique attracteur stable de la dynamique.

Dans la section suivante, nous allons décrire le nouveau modèle d'opinion avec l'introduction des contrariants et analyser la dynamique d'opinion ainsi que le temps de polarisation.

4.2 Description du modèle

Nous travaillons avec les groupes constitués de trois personnes ($k = 3$). A un temps donné t , pour une population de N personnes, $N_+(t)$ personnes partagent l'opinion A et $N_-(t)$ l'opinion B avec

$$N_+(t) + N_-(t) = N.$$

Ces valeurs peuvent être comparées à des votes pour une élection par exemple. Les probabilités correspondant à une intention de vote individuelle en faveur de A ou B s'écrivent

$$p_{\pm}(t) \equiv \frac{N_{\pm}(t)}{N}, \quad (4.1)$$

avec

$$p_+(t) + p_-(t) = 1.$$

Comme on l'a vu avant, après une mise à jour dans les groupes de trois personnes, on a une nouvelle distribution des intentions de vote en faveur de A , qui est

$$p_+(t+1) = p_+(t)^3 + 3 p_+(t)^2(1 - p_+(t)), \quad (4.2)$$

où

$$p_+(t+1) > p_+(t) \quad \text{si} \quad p_+(t+1) > \frac{1}{2}$$

et

$$p_+(t+1) < p_+(t) \quad \text{si} \quad p_+(t+1) < \frac{1}{2}.$$

En effet, on voit que l'intention de vote $p_+(t)$ circule de façon monotone à travers les deux attracteurs stables en $P_{+A} = 1$ et $P_{+B} = 0$. Un séparateur instable est localisé en $p_c = \frac{1}{2}$.

Durant une campagne d'élection, les gens ont plusieurs discussions locales successives. Afin de suivre l'évolution d'intention de vote associée, on itère l'équation (4.2). Par exemple, si on débute avec $p_+(t) = 0.45$, après 8 mises à jour successives, on aura $p_+(t+8) = 0.00$. Etant donné toute distribution initiale d'intention de vote, on aura toujours une polarisation totale de l'opinion collective. Les opinions individuelles et collectives se stabilisent simultanément le long de la même et unique intention de vote, soit A , soit B .

Nous sommes maintenant en position pour introduire dans ce modèle l'existence de contrariants. On définit un contrariant comme suit :

Un contrariant arrive dans un groupe avec comme tout le monde une opinion bien tranchée et qui intervient lors de la mise à jour locale. Ensuite la mise à jour prend place comme avant en utilisant la règle de majorité locale afin de sélectionner la nouvelle opinion qui est partagée par tout le monde dans le groupe. Cependant, une fois que le contrariant quitte le groupe, il change immédiatement d'opinion et opte donc pour l'opinion opposée. Ce changement est indépendant du choix lui-même.

En posant les choix des contrariants à une densité a , avec $0 \leq a \leq 1$, le mécanisme des contrariants peut se définir comme suit :

- AAA et AAB \rightarrow AAA avec probabilité $(1 - a)^3$,
- AAA et AAB \rightarrow AAB avec probabilité $3a(1 - a)^2$,
- AAA et AAB \rightarrow ABB avec probabilité $3a^2(1 - a)$,
- AAA et AAB \rightarrow BBB avec probabilité a^3

et la symétrie est respectée par rapport à A et B .

En combinant ces cas avec l'équation (4.2) pour la densité d'opinion A , on a

$$p_+(t+1) = (1-a)[p_+(t)^3 + 3p_+(t)^2(1-p_+(t))] + a[(1-p_+(t))^3 + 3(1-p_+(t))^2p_+(t)], \quad (4.3)$$

où le premier terme correspond au processus de mises à jour régulier et le second terme représente la contribution des contrariants dans les groupes locaux où les majorités locales étaient en faveur de B .

A partir de cette équation, on peut facilement voir, sur la figure (4.1) ci-dessous, l'effet des choix des contrariants à une faible densité $a = 0.10$, c'est-à-dire, avec 10 % de contrariants, comparé au cas pur $a = 1$.

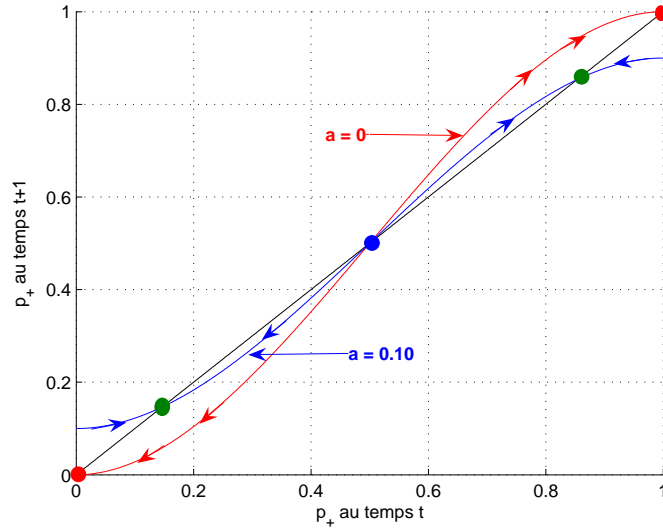


FIG. 4.1 – Graphique montrant l'évolution de $p_+(t+1)$ comme une fonction de $p_+(t)$, avec $a = 0$ (courbe rouge) et $a = 0.10$ (courbe bleue). Dans le second cas, les deux attracteurs stables ont bougé des polarisations totales pour aller vers une coexistence d'un mélange des intentions de vote.

Les effets principaux sont doubles. Le premier effet est le changement des attracteurs stables vers une coexistence des valeurs des intentions de vote. La polarisation totale est évitée avec,

$$P_{+A(B)} = \frac{(2a - 1) \pm \sqrt{12a^2 - 8a + 1}}{2(2a - 1)}, \quad (4.4)$$

qui est défini seulement pour $a \leq \frac{1}{6}$. Vérifions cela et calculons les deux attracteurs de l'équation (4.2), tout en sachant qu'il y a le séparateur en $p_c = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} p_+(t+1) &= (1-a)[p_+(t)^3 + 3p_+(t)^2(1-p_+(t)) \\ &\quad + a[(1-p_+(t))^3 + 3(1-p_+(t))^2p_+(t)], \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p_+(t+1) = p_+(t)^3(-2+4a) + p_+(t)^2(3-6a) + a.$$

Posons $p_+(t+1) = p_+(t)$, on obtient alors

$$p_+(t)^3(-2+4a) + p_+(t)^2(3-6a) - p_+(t) + a = 0.$$

Or on sait que cette équation s'annule en $p_+(t) = \frac{1}{2}$, utilisons donc Horner pour réduire son degré :

$$\begin{array}{rrrrr} -2+4a & 3-6a & -1 & a & \\ \frac{1}{2} & \downarrow & -1+2a & 1-2a & -a \\ \hline -2+4a & 2-4a & -2a & 0 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(p_+(t) - \frac{1}{2}\right)[p_+(t)^2(-2+4a) + p_+(t)(2-4a) - 2a] = 0.$$

Il nous reste alors à résoudre la seconde partie de cette équation, à savoir :

$$p_+(t)^2(-2+4a) + p_+(t)(2-4a) - 2a = 0.$$

Calculons ses racines :

$$\Delta = 4(12a^2 - 8a + 1)$$

et on obtient donc le résultat souhaité

$$P_{+A(B)} = \frac{(2a - 1) \pm \sqrt{12a^2 - 8a + 1}}{2(2a - 1)}.$$

Enfin, il est aisé de prouver que cette équation n'est définie que pour $a \leq \frac{1}{6}$, en montrant la positivité de la carrée.

Pour une valeur $a = 0.10$, on a $P_{+A} = 0.85$ et $P_{+B} = 0.15$. En $P_{+A} = 0.85$, il y a une coexistence des intentions de vote avec respectivement 85 % des personnes en faveur de A et 15 % en faveur de B . Par contre, les choix des contrariants gardent inchangée la valeur du séparateur en $p_c = \frac{1}{2}$.

Le second effet des choix des contrariants se marque dans l'augmentation du nombre de mises à jour nécessaires pour atteindre les attracteurs stables. Par exemple, si on démarre avec une valeur initiale $p_+(t) = 0.45$ comme au-dessus, avec $a = 0.10$, cela donne les séries

$$\begin{aligned} - & p_+(t+1) = 0.44, \\ - & p_+(t+2) = 0.43, \\ - & p_+(t+3) = 0.42, \\ - & p_+(t+4) = 0.40, \\ - & p_+(t+5) = 0.38, \\ - & \dots \end{aligned}$$

Douze mises à jours sont encore requises pour atteindre l'attracteur stable 0.15. En tout, il a fallu 17 mises à jour contre 8 seulement sans les contrariants.

Dans le chapitre 1, nous avons une formule pour calculer le nombre de mises à jour nécessaires pour atteindre un des deux attracteurs. Cette équation était :

$$n \simeq \frac{1}{\ln[\lambda]} \ln \left[\frac{p_c - P_S}{p_c - p_+(t)} \right],$$

où λ est la dérivée première de la fonction $p_S(t+1)$ par rapport à $p_S(t)$ prise en $p_S(t) = p_c$. Dans notre cas, cette équation devient :

$$n \simeq \frac{1}{\ln \left[\frac{3}{2}(1-2a) \right]} \ln \left[\frac{p_c - p_S}{p_c - p_+(t)} \right] + \frac{1.85}{(1-2a)^{5.2}}, \quad (4.5)$$

où le dernier terme est une correction adéquate. Vérifions la valeur de λ :

$$\lambda = \frac{d P_+(t+1)}{d P_+(t)} \quad \text{au point} \quad p_S(t) = p_c = \frac{1}{2}.$$

Calculons d'abord la dérivée :

$$\lambda = \frac{d P_+(t+1)}{d P_+(t)} = 3p_+(t)^2(-2+4a) + 2p_+(t)(3-6a).$$

Posons $p_+(t) = \frac{1}{2}$:

$$\lambda = \frac{3}{2}(1 - 2a),$$

qui est bien la valeur souhaitée.

On a $P_S = P_{+B}$ si $p_+(t) < p_c$ tandis que $P_S = P_{+A}$ lorsque $p_+(t) > p_c$. Lorsque $a = 0$, c'est-à-dire quand il n'y a aucun contrariant, n est toujours assez petit, on constate par exemple que 8 mises à jour sont suffisantes pour atteindre une polarisation avec une valeur initiale $p_+(t) = 0.45$, et 4 seulement lorsque $p_+(t) = 0.30$. Lorsque $a = 0.10$, il faut respectivement 17 et 9 itérations pour atteindre un attracteur stable (cfr figure ci-dessous)¹.

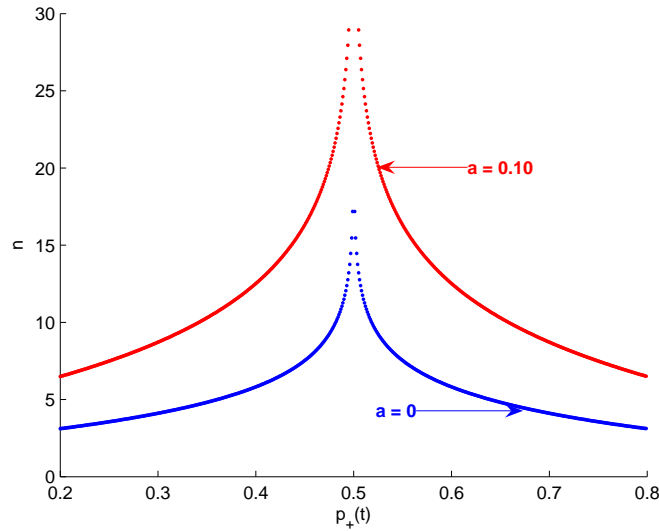


FIG. 4.2 – Graphique montrant l'approximation du nombre de mises à jour pour atteindre une polarisation totale comme une fonction d'un support initial $p_+(t)$, avec en bleu $a = 0$ et en rouge $a = 0.10$.

L'équation (4.5) et la figure 4.2 montrent explicitement l'effet du choix contrariant qui augmente le nombre de niveaux requis pour atteindre les attracteurs stables. Cela signifie un temps réel plus long. En termes pratiques, cela implique une coexistence quasi-stable des deux intentions de vote assez proches de 50 %, mais avec déjà une majorité claire dans une direction, qui est déterminée par la majorité initiale.

¹Cfr code Matlab en Annexe

Cependant, les choix contrariants peuvent produire un changement qualitatif radical dans l'ensemble de la dynamique des intentions de vote. L'équation (4.4) montre que pour une densité $a_c = \frac{1}{6} \simeq 0.17$, les choix contrariants font en sorte que les deux attracteurs se confondent au séparateur instable $p_c = \frac{1}{2}$ le transformant ainsi en un attracteur stable.

Les conséquences sur la dynamique des intentions de vote deviennent drastiques. La direction de flux est renversée rendant ainsi toute densité initiale convergente vers une égalité parfaite entre les intentions de vote A et B . En termes physiques, les contrariants produisent une transition de phase allant d'une phase majorité-minorité vers une phase de balance de 50 % avec aucun partage majorité-minorité. Dans la phase ordonnée, les élections atteignent toujours une majorité très claire, alors que, en ce qui concerne la phase désordonnée, les élections mènent à un avenir aléatoire conduit par des fluctuations statistiques. On peut voir cet effet sur la figure ci-dessous, où il y a 20 % de contrariants ($a = 0.20$).

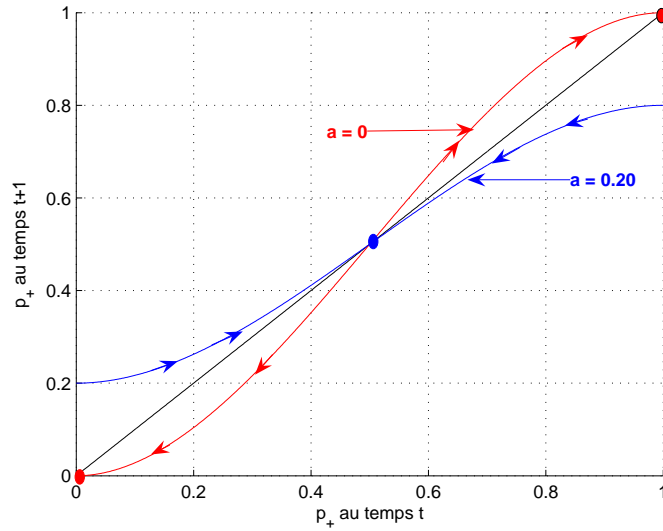


FIG. 4.3 – Graphique montrant l'évolution de $p_+(t+1)$ comme une fonction de $p_+(t)$, avec $a = 0$ (courbe rouge) et $a = 0.10$ (courbe bleue).

Dans la vraie vie sociale, les gens ne se rencontrent pas seulement par groupes de trois personnes. Cependant, généraliser l'approche qu'on vient de voir à des tailles de groupes plus grandes est simple et ne change pas l'aspect qualitatif du modèle. Le renversement de la dynamique conduit par les contrariants à travers la phase désordonnée sans partage majorité-minorité est préservé. L'effet principal est une augmentation de la valeur de la densité critique des contrariants à laquelle la transition de phase a lieu. Dans le cas de groupes de tailles impaires k , l'équation (4.5) devient :

$$p_+(t+1) = (2a-1) \sum_{i=(k+1)/2}^k C_k^i p_+(t)^i (1-p_+(t))^{(k-i)} + a. \quad (4.6)$$

Le paramètre qui contribue à la détermination de la direction du flux et de la transition de phase associée, est la valeur propre au point $p_c = \frac{1}{2}$. Cette dernière est donnée par :

$$\Lambda = (2a-1) \left[\frac{1}{2} \right]^{k-1} \sum_{i=(k+1)/2}^k (2i-k) C_k^i. \quad (4.7)$$

En effet, si on calcule la dérivée de $p_+(t+1)$ par rapport à $p_+(t)$, évaluée au point $p_+(t) = p_c = \frac{1}{2}$, pour trouver la matrice Jacobienne, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d p_+(t+1)}{d p_+(t)} &= (2a-1) \sum_{i=(k+1)/2}^k [C_k^i i P_+(t)^{(i-1)} (1-p_+(t))^{k-i} \\ &\quad - C_k^i p_+(t)^i (k-i) p_+(t)^{k-i-1}]. \end{aligned}$$

Si on pose $p_+(t) = \frac{1}{2}$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} \frac{d p_+(t+1)}{d p_+(t)} &= (2a-1) \sum_{i=(k+1)/2}^k \left[C_k^i i \left(\frac{1}{2} \right)^{(k-1)} - C_k^i \left(\frac{1}{2} \right)^{(k-1)} (k-i) \right] \\ &= (2a-1) \left[\frac{1}{2} \right]^{(k-1)} \sum_{i=(k+1)/2}^k C_k^i (2i-k). \end{aligned}$$

Comme c'est le seul élément de notre matrice, il s'agit bien de la valeur propre recherchée.

Lorsque $\Lambda > 1$, cela détermine l'attracteur instable avec une phase ordonnée caractérisée par l'existence d'un partage majorité-minorité. Au contraire, lorsque $\Lambda < 1$, cela donne l'attracteur stable. Le cas $\Lambda = 1$ détermine la valeur critique de la densité a_c pour laquelle la phase de transition a lieu. A partir de l'équation (4.7), on a

$$a_c = \frac{1}{2} \left(1 - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \sum_{i=(k+1)/2}^k (2i - k) C_k^i \right]^{-1} \right). \quad (4.8)$$

Dans le cas $k = 3$, on retrouve le résultat précédent $a_c = \frac{1}{6} \simeq 0.17$. A partir de cette équation on voit que :

- $a_c \rightarrow \frac{1}{2}$ lorsque $k \rightarrow +\infty$,
- $a_c = 0.23$ pour $k = 5$ et
- $a_c = 0.30$ pour $k = 9$.

4.3 Conclusion

On a donc présenté ici un modèle faisant intervenir les contrariants et nous en avons étudié les différents effets dans la formation des opinions. A faible densité a , la dynamique d'opinion présente une phase mitigée avec un partage clair majorité-minorité. Cependant, au-delà d'une certaine densité critique a_c , les contrariants ont pour effet de confondre les deux attracteurs au point du séparateur p_c . Ce dernier devient alors l'unique attracteur de la dynamique. Lorsque $a > a_c$, les intentions de vote circulent de façon déterminante avec le temps vers une égalité exacte entre les opinions A et B . Dans cette nouvelle phase désordonnée, aucune majorité n'apparaît. Les personnes continuent de changer d'avis et il n'y a aucune apparition d'une quelconque majorité. Dès lors, une élection donnerait comme résultat un vainqueur au hasard dû à certaines fluctuations statistiques. La valeur de a_c dépend de la taille de distribution des groupes mis à jour.

Deuxième partie

Recherche : modèle de type Ising

Chapitre 5

Anticonformisme dans un modèle d'opinion

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la recherche du chaos dans des modèles d'opinion en dimension 1. Dans ce cas, nous n'allons plus travailler avec le modèle d'opinion de S. Galam mais nous allons étudier un modèle de formation d'opinion d'une cellule de type Ising.

Considérons le problème d'une société composée de N individus qui ont le choix entre deux opinions : 0 et 1.

Ces individus prennent position selon une dynamique simple : ils calculent la fraction $\frac{i}{k}$ d'opinions positives, c'est-à-dire le nombre de 1, dans leur voisinage, et adoptent ensuite cette opinion avec une probabilité $\tau(1|\frac{i}{k})$. La fonction τ peut également être influencée par un champ extérieur, H , qui représente les médias tels que la télévision. Cela peut arriver que ce champ H ne soit pas distribué de façon uniforme. Dans le cas d'absence de champ extérieur, c'est-à-dire lorsque $H = 0$, la fonction de probabilité de transition est symétrique, dans le sens que $\tau(0|1 - \frac{i}{k}) = \tau(1|\frac{i}{k})$.

Cette probabilité de transition τ dépend également d'un autre paramètre J qui représente le couplage entre les opinions. Ce paramètre J provient de la définition de l'Hamiltonien dans le modèle d'Ising :

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

où $\sigma_i \in \{-1, 1\}$.

Nous nous intéressons au cas où $J < 0$, que l'on appelle cas "antiferromagnétique" ou anticonformiste, dans lequel même une forte majorité locale ne peut triompher.

L'idée est que, lorsqu'une opinion (ou un comportement social) est partagé par la presque totalité du voisinage, il est extrêmement difficile pour un individu de se comporter différemment, alors qu'en présence d'une majorité disputée, les individus "anticonformistes" pourraient choisir de s'opposer à cette majorité. On peut faire le lien avec le chapitre 4, où le comportement anticonformiste est l'équivalent des contrariants.

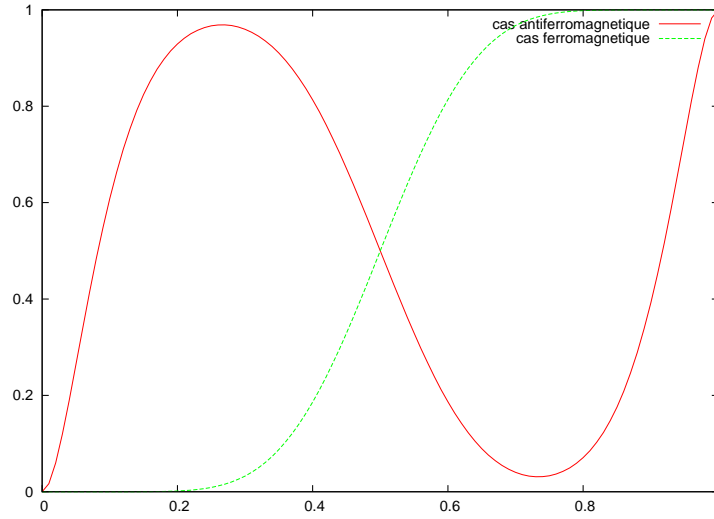


FIG. 5.1 – Graphique montrant la variation de l'équation du champ moyen en fonction du paramètre J . Si $J > 0$ on est dans le cas ferromagnétique et si $J < 0$ on est dans le cas antiferromagnétique.

En dimension 1, sans la présence d'états absorbants en phase d'équilibre, on ne peut pas observer de phase de transition.

Ce problème est intéressant car on va voir, dans la section suivante, que les équations du champ moyen (c'est-à-dire, la proportion à l'itération suivante de personnes favorables à l'opinion 1) peuvent être chaotiques. Si on suppose un nombre de voisins k (ou connectivité) fixe, on obtient alors comme équation du champ moyen :

$$c' = \sum_{j=0}^k C_j^k c^j (1-c)^{k-j} \tau(1|j/k), \quad (5.1)$$

et avec un grand nombre de connectivités on peut observer des cycles limites et le chaos.

Clairement, les approximations du champ moyen pourraient bien être trompeuses. Les simulations que l'on va faire vont montrer que le chaos "macroscopique" (c'est-à-dire, une oscillation cohérente de la population) n'a pas lieu, alors que le chaos "microscopique" (comportement irrégulier de l'ensemble de la population) peut être présent.

Dans un premier temps, nous allons étudier ce système lorsque chaque individu interagit avec ses plus proches voisins. On ne se trouve donc plus dans un système avec des groupes de discussion, comme dans le modèle de S. Galam vu précédemment.

Par la suite, nous allons étudier le cas où on ne prend plus les plus proches voisins mais, avec une certaine probabilité p_s , on va prendre des connections à plus longue distance. C'est ce qu'on appelle l'effet "smallworld". On peut citer en exemple le modèle de Watts et Strogatz [15].

5.2 Description du modèle

Notons $s_i = s_i(t) \in \{0, 1\}$ l'opinion de l'individu i . Nous pouvons repasser aux variables du modèle d'Ising $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ par la transformation

$$\sigma_i = 2s_i - 1.$$

L'opinion d'une personne évolue dans le temps en accord avec l'opinion de ses voisins, identifiés par une matrice adjacente $a_{i,j} \in \{0, 1\}$: une personne j est voisine avec i si $a_{i,j} = 1$.

L'ensemble des voisins d'une personne donnée i est appelé le voisinage de i et est noté v_i . Remarquons qu'une personne peut être son propre voisin si $a_{i,i} = 1$. Le nombre de voisins (ou connectivité) k_i de la personne i est la taille de v_i , c'est-à-dire

$$k_i = |v_i| = \sum_j a_{ij}.$$

On choisit d'assigner à tous les voisins le même poids de persuasion, on définit donc le champ local ("la pression sociale") h_i comme

$$h_i = h(v_i) = \frac{\sum_{j \in v_i} s_j}{k_i}. \quad (5.2)$$

Ce champ local est compris entre 0 et 1. On peut également ajouter un champ extérieur H , comme la communication audiovisuelle, mais en général nous poserons toujours $H = 0$.

L'effet de la pression sociale est le même pour chaque individu, donc nous modélisons une société uniforme. De plus, nous n'incluons aucune mémoire.

L'évolution est définie par les probabilités de transition

$$\tau(1|h_i).$$

Nous exprimons ces probabilités de transition comme suit :

$$\tau(1|h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < q, \\ 1 & \text{si } h > 1 - q, \\ \frac{1}{1 + \exp[-2(H + J(2h - 1))]} & \text{sinon} \end{cases}$$

où q est un seuil assurant l'existence des états absorbants $s = (0...0)$ et $s = (1...1)$: lorsque la société atteint une opinion finale uniforme, il n'y a plus d'évolution possible du système.

La constante de couplage J prend des valeurs réelles comprises dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Pour $J < 0$, la société a un comportement anticonformiste (ou antiferromagnétique), c'est-à-dire que chaque individu i a tendance à choisir l'opinion opposée à celle de son voisinage h . Mais lorsque h se rapproche d'un certain seuil de conformité q , la pression sociale devient trop forte et l'individu anticonformiste i commence à réagir comme son voisinage.

Pour une question de simplicité, nous allons considérer un modèle où la connectivité est la même pour tous les individus, donc $k = k_i \forall i$.

En notant s comme étant une certaine configuration, $s = (s_1, \dots, s_N)$, et $P(s, t)$ la probabilité de l'observer au temps t , on a que la probabilité d'observer une certaine configuration $s' = (s'_1, \dots, s'_N)$ au temps $t + 1$ est définie comme suit

$$P(s', t + 1) = \sum_s W(s'|s)P(s, t) \quad (5.3)$$

où

$$W(s'|s) = \tau(s'_1|s_1, s_2)\tau(s'_2|s_2, s_3)\dots$$

où il s'agit des probabilités d'observer s'_1 par exemple au temps $t + 1$ si on a observé le couple s_1, s_2 au temps t .

Supposons que l'équation (5.3) puisse être sommée sur s'_2, s'_3, \dots et en utilisant la propriété suivant :

$$\sum_{s'} \tau(s'|s_1, s_2) = 1,$$

on a

$$P_1(s'_1; t + 1) = \sum_{s'_2, s'_3, \dots} P(s'_1, s'_2, \dots; t + 1)$$

où P_1 est la densité usuelle, que nous noterons $c = c(t)$.

Considérons le cas régulier avec une connectivité uniforme $k = 2$. En utilisant les distributions, l'évolution de l'équation du système est donnée par la hiérarchie infinie suivante

$$P_1(s'_1; t + 1) = \sum_{s_1, s_2} P_2(s_1, s_2; t) \tau(s'_1|s_1, s_2) \quad (5.4)$$

$$P_2(s'_1, s'_2; t + 1) = \sum_{s_1, s_2, s_3} P_3(s_1, s_2, s_3; t) \tau(s'_1|s_1, s_2) \tau(s'_2|s_2, s_3) \quad (5.5)$$

$$\dots \quad (5.6)$$

L'approximation du champ moyen consiste à tronquer la hiérarchie ci-avant en un point donné en factorisant les probabilités de distribution. A la première itération, pour une connectivité uniforme k , on obtient

$$c' = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} c^i (1-c)^{k-i} \tau(1|i/k). \quad (5.7)$$

Dans la section suivante, nous allons illustrer la variation de ce champ moyen en faisant varier d'une part le nombre de connectivité et d'autre part le paramètre de couplage J . Et nous verrons alors pour quelles valeurs le chaos fait son apparition.

5.3 Présence du chaos dans le champ moyen

Nous allons seulement nous intéresser au cas antiferromagnétique ($J < 0$) et le faire varier pour voir quelle sera l'évolution de l'équation du champ moyen, courbe bleue. Sur les graphiques qui vont suivre, apparaîtront également, en vert, la courbe des probabilités de transition ($\tau(1|\frac{i}{k})$) ainsi que, en rose, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une position finale, nous démarrons avec une valeur c choisie au hasard ¹.

Dans un premier temps, nous allons faire un petit lien avec le modèle de S. Galam. Pour cela, nous allons poser le nombre de connectivités k à trois et quatre respectivement, comme on peut le voir sur les graphes ci-dessous. Rappelons tout de même que dans ce cas-ci chaque personne interagit avec ses plus proches voisins et qu'il ne n'agit plus de groupes de discussion fixés selon la géométrie sociale comme précédemment.

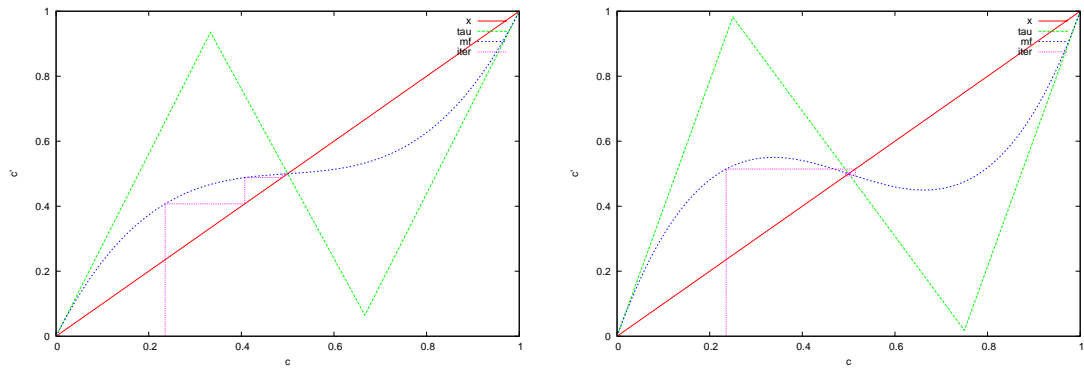


FIG. 5.2 – Graphiques montrant la variation du champ moyen c' comme une fonction de c . A gauche, nous avons une connectivité $k = 3$ et à droite $k = 4$.

Sur ces graphes, on voit que très peu d'itérations sont nécessaires pour atteindre le point fixe $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'on se trouve dans une situation de partage des deux opinions. On constate que l'on retrouve le même genre de graphes que ceux réalisés au chapitre 1 (cfr figures (1.3) et (1.5)), lorsque la valeur de la probabilité $m_{k,j}$ était proche de zéro. On en déduit que les probabilités $m_{k,j}$ du modèle de S. Galam ont le même rôle que les probabilités $\tau(1|\frac{i}{k})$, avec la présence de comportements tantôt antiferromagnétiques et tantôt ferromagnétiques.

¹Cfr code Fortran en Annexe.

Nous allons maintenant travailler avec un voisinage beaucoup plus grand et observer ce qu'il se passe pour différentes valeurs négatives du paramètre J . Pour cela, nous allons fixer le nombre de connectivités, k , à 20 et nous allons faire varier le paramètre J pour cette connectivité fixe.

On va commencer avec une valeur de J proche de zéro et par la suite on s'en éloignera petit à petit. Sur ce premier graphique, on a posé $J = -1$ et on constate que pour cette valeur, après un nombre d'itérations assez élevé, on finit par converger vers le point fixe stable $\frac{1}{2}$.

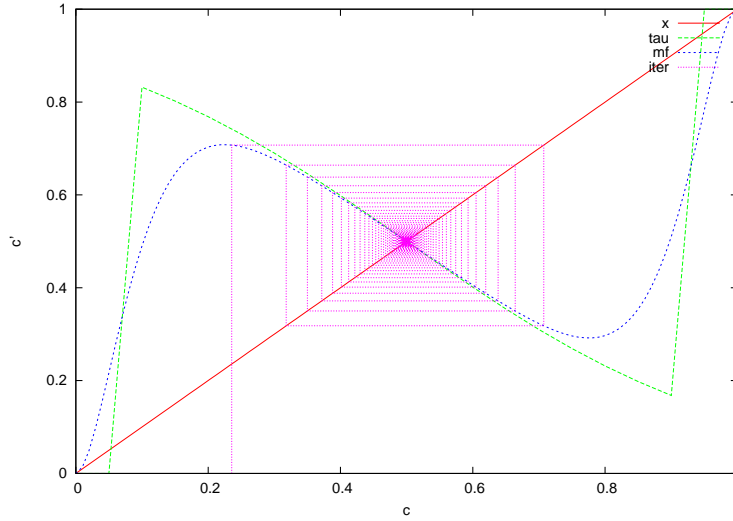


FIG. 5.3 – Graphique montrant la variation du champ moyen c' en fonction de c avec $k = 20$ et $J = -1$.

En réalité, en effectuant d'autres simulations, on observe, pour toutes les valeurs de J comprises entre 0 et -1 , la convergence vers le point fixe $\frac{1}{2}$.

On va diminuer la valeur de J et la poser maintenant à -2.5 . On constate alors qu'une orbite périodique est en train de se former autour de la valeur $\frac{1}{2}$. Cela signifie qu'il y a un comportement oscillatoire des opinions. On remarque donc que lorsqu'il n'est plus possible d'atteindre une système stable, il est possible d'obtenir des systèmes oscillatoires ou périodiques. Dans ce cas, même si on ne conserve pas un état constant, on passe cependant par des états parfaitement connus dans leur enchaînement et dans leur constitution.

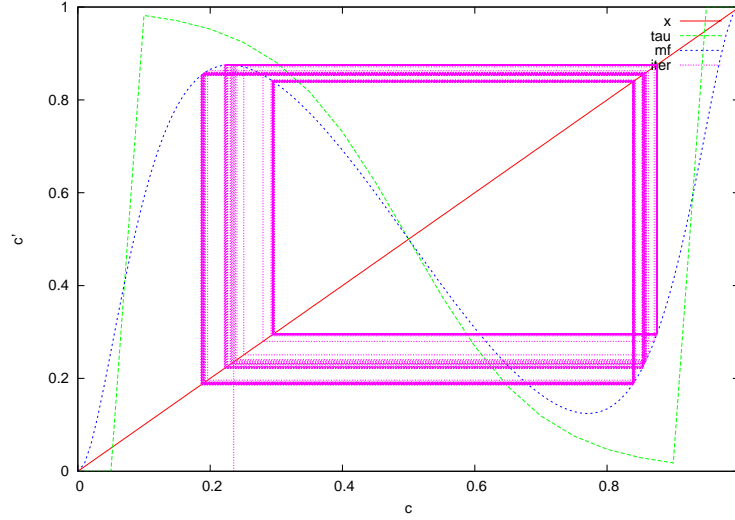


FIG. 5.4 – Graphique montrant la variation du champ moyen c' en fonction de c avec $k = 20$ et $J = -2.5$.

Après avoir réalisé quelques simulations, on constate que pour $-1 < J < -3.5$, on obtient toujours une orbite périodique autour de la valeur $\frac{1}{2}$.

Sur ce troisième graphe, on a posé $J = -4$ et on constate que c'est le chaos. Aucune décision ne parvient donc à être prise. Il en est de même pour toutes les valeurs de J inférieures à -4 .

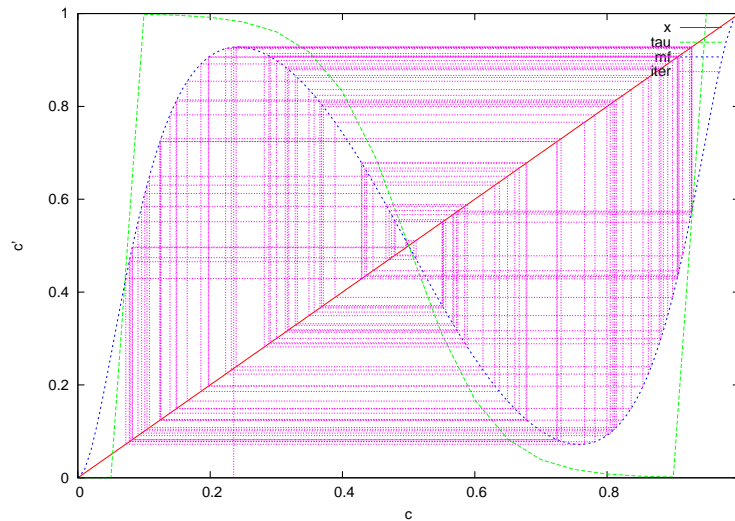


FIG. 5.5 – Graphique montrant la variation du champ moyen c' en fonction de c avec $k = 20$ et $J = -4$.

Nous travaillons toujours sans aucun champ extérieur, c'est-à-dire que le paramètre H est nul. Ceci dit, juste afin de voir l'effet de ce champ extérieur H , faisons une simulation avec $H = -2$:

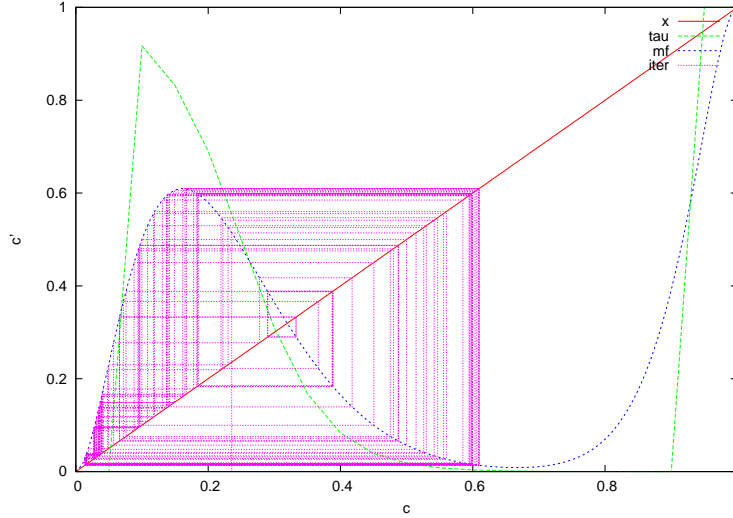


FIG. 5.6 – Graphique montrant la variation du champ moyen c' en fonction de c avec $k = 20$ et $J = -4$ et $H = -2$.

On voit immédiatement que l'effet de symétrie est rompu et avec une valeur de H négative, on constate que le point fixe se déplace vers la valeur zéro, qui est atteinte après un grand nombre d'itérations. Une valeur négative de H influencera donc la population vers l'opinion 0, alors qu'une valeur positive de H la fera tendre vers l'opinion 1.

Une deuxième étape dans l'étude du comportement de l'équation du champ moyen a été de réaliser un diagramme de bifurcation de son comportement en fonction de J compris, dans un premier temps, entre 0 et -4 . Le diagramme de bifurcation permet de mieux visualiser l'évolution du système vers le chaos par doublement de période.

En étudiant les valeurs d'équilibre du système dynamique, on constate que :

- tant que J est inférieur à -1 , la valeur d'équilibre $\frac{1}{2}$ reste inchangée,
- la première bifurcation a lieu pour $J = -1.1$, et pour $-1 < J \leq -3.5$ deux valeurs d'équilibre sont alors observées,
- au delà de $J = -3.5$, le système exhibe brusquement un comportement apparemment imprévisible. Dans ce cas, on parle de comportement chaotique.

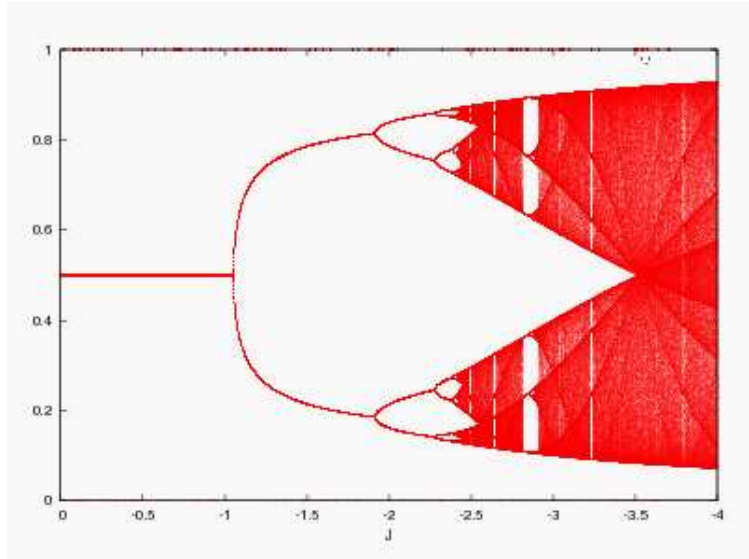


FIG. 5.7 – Diagramme de bifurcation montrant le comportement et les points fixes de l'équation du champ moyen c' en fonction du paramètre J variant de 0 à -4 avec $k = 20$.

Prenons maintenant une valeur maximale de J plus élevée et observons ce qu'il se passe sur le diagramme de bifurcation suivant :

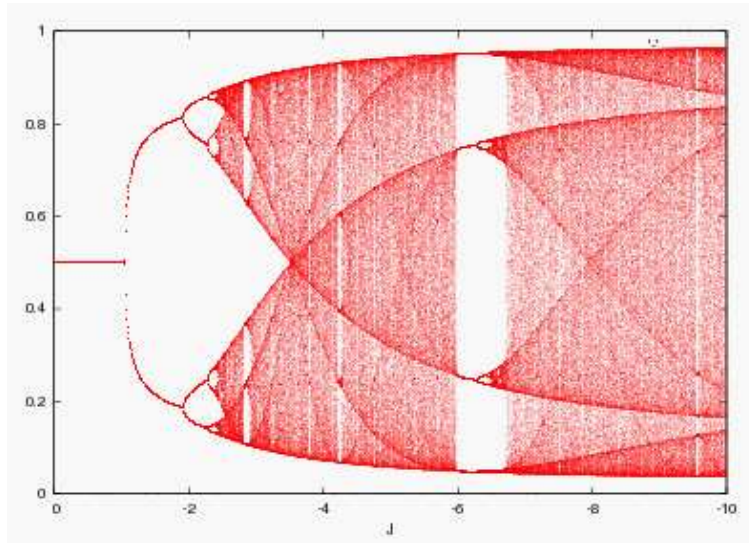


FIG. 5.8 – Diagramme de bifurcation montrant le comportement du champ moyen c' en fonction du paramètre J variant de 0 à -10 avec $k = 20$.

On observe qu'aux environs de $J = -6$ apparaît une fenêtre de stabilité sous forme d'une bande blanche verticale. Cela signifie que la population devient à nouveau prévisible. On retrouve donc une période de stabilité en plein coeur d'une zone chaotique.

On peut donc conclure, que pour ce modèle de type Ising, l'influence du paramètre de couplage J , lorsqu'il est antiferromagnétique, sur l'évolution de l'équation du champ moyen est très forte. En effet, pour une valeur pas trop éloignée de zéro, $J = -3.5$, le chaos apparaît déjà au sein de la population. On a également remarqué que, par moment, la population peut redevenir prévisible, mais le chaos finit toujours par refaire son apparition.

5.4 Connectivité à longue distance : "Small-world"

Dans cette section, nous n'allons plus prendre les plus proches voisins mais nous allons changer, au début, de façon aléatoire certains de ces plus proches voisins et en prendre des nouveaux avec une connectivité à plus longue distance. Ces connectivités longue distance sont régulées selon une probabilité p_s . C'est ce qu'on appelle le "smallworld" ².

Nous allons réaliser quelques simulations, en faisant varier la valeur de la probabilité p_s , et essayer de voir si nous avons toujours un comportement chaotique de la population.

Dans les graphes qui vont suivre seront représentés, d'une part l'équation du champ moyen (en vert) et d'autre part la densité de la population suivant une certaine probabilité de connection à longue distance p_s (en bleu).

On travaille toujours avec une connectivité fixe, $k = 20$, on a posé $J = -4$, on a donc un champ moyen chaotique, et on a une densité initiale de $\frac{1}{2}$. Cette densité est notre règle de mise à jour, c'est-à-dire que, si au départ la fraction de la population pour l'opinion 1 est inférieure à cette densité (dans ce cas il s'agit donc d'une minorité), alors après une itération, on aura convergence vers l'opinion 1 et vice versa.

Commençons avec une valeur de p_s nulle, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune connectivité à longue distance.

Sur ce graphe, on observe une concentration de la densité de population autour du point fixe $\frac{1}{2}$. On voit également que ça ne suit pas du tout le comportement du champ moyen. Il s'agit d'un chaos microscopique avec des oscillations désynchronisées.

²Cfr code Fortran en Annexe

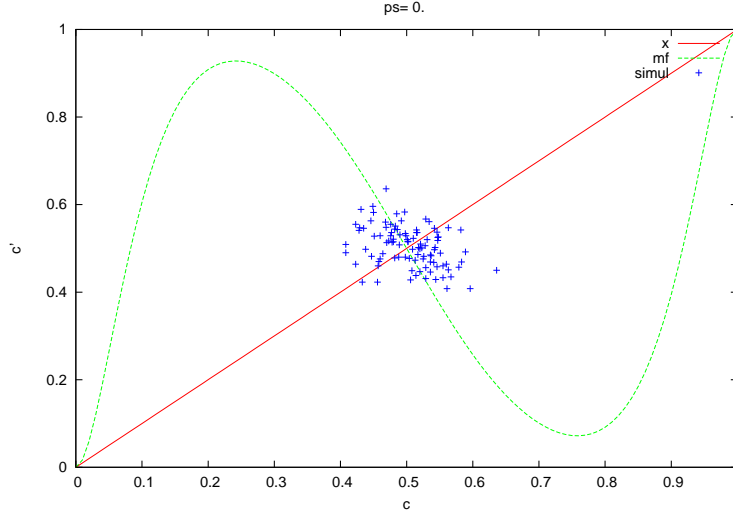


FIG. 5.9 – Graphique montrant la dépendance du champ moyen c' en fonction de c en vert et simulations microscopiques à courte portée avec $p_s = 0$.

Augmentons la probabilité p_s et posons-la respectivement à 0.2 et 0.5 sur les graphes ci-dessous :

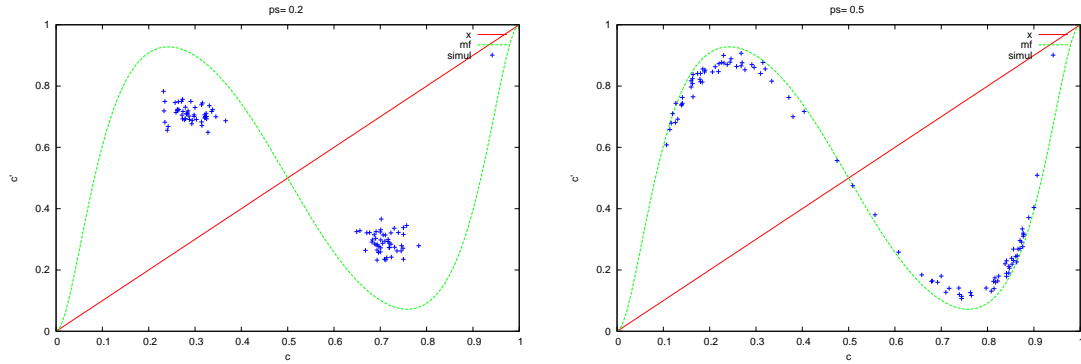


FIG. 5.10 – Graphiques montrant la dépendance du champ moyen c' en fonction de c en vert et simulations microscopiques à gauche une probabilité small-world $p_s = 0.2$ et à droite $p_s = 0.5$.

Sur le graphe de gauche, avec la probabilité de connectivité à longue distance encore faible, on observe une oscillation dans le comportement de la population. On pourrait penser à un genre de cycle limite. Sur le graphe de droite, avec une probabilité $p_s = 0.5$, la population commence à s'aligner sur la courbe du champ moyen. Cela signifie que l'on commence à avoir un comportement chaotique au sein de la population.

Prenons maintenant une probabilité totale d'avoir des connectivités à

longue distance, c'est-à-dire $p_s = 1$. Cela implique qu'il n'y a désormais plus aucun voisin proche mais que des "voisins" éloignés.

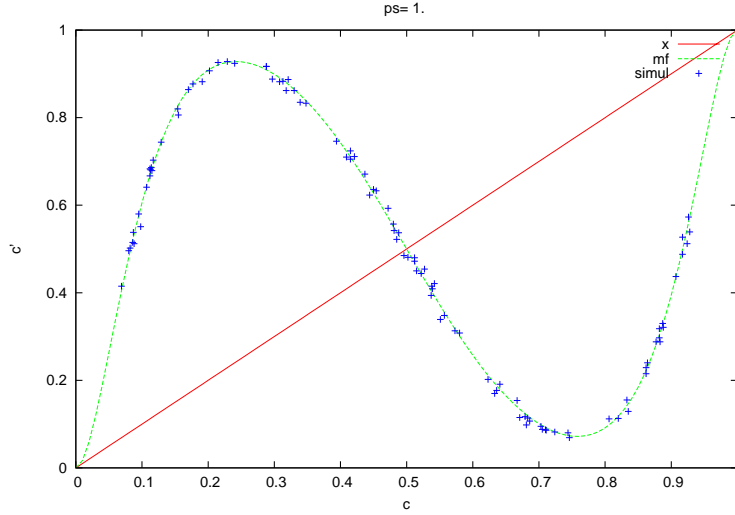


FIG. 5.11 – Graphique montrant la dépendance du champ moyen c' en fonction de c en vert et simulations microscopiques avec une probabilité small-world $p_s = 1$.

Cette fois, les simulations suivent parfaitement la courbe du champ moyen. Plus aucune prédiction n'est possible avec des connectivités à longue distance.

Comme à la section précédente, réalisons un diagramme de bifurcation du champ moyen par rapport aux différentes valeurs de p_s . Afin de mieux voir, on a pris une population composée de 10 000 individus.

En étudiant les valeurs d'équilibre du système, on peut voir que :

- tant que p_s est inférieur ou égal à 0.15, la valeur d'équilibre $\frac{1}{2}$ reste inchangée,
- la première bifurcation a lieu pour $p_s = 0.16$, et pour $0.16 < p_s \leq 0.5$ deux valeurs d'équilibre sont alors observées,
- au delà de $p_s = 0.5$, le système prend une infinité de valeurs et on obtient alors un comportement imprévisible. Dans ce cas, on parle de comportement chaotique.

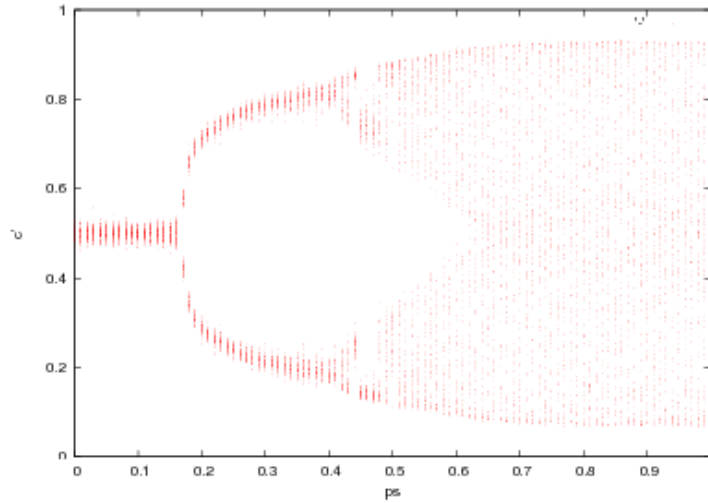


FIG. 5.12 – Diagramme de bifurcation montrant la variation du champ moyen c' selon une probabilité "smallworld" p_s comprise entre 0 et 1.

Le problème avec ces dernières simulations est qu'elles ne sont pas très réalistes, en effet le champ moyen n'est pas un bon représentant, ne capture pas la "réalité". Dans ce cas, l'équation du champ moyen n'a aucune dépendance par rapport à la probabilité p_s . Ce sont pourtant les connections à longue distance ("smallworld") avec une probabilité p_s qui déclenchent la transition dans le comportement du champ moyen. L'idée est donc de trouver une formulation effective, qui ressemblerait à l'équation du champ moyen mais qui puisse inclure les effets "smallworld".

5.5 Conclusion

Ce chapitre était destiné à la recherche, effectuée lors de mon stage à la Faculté de Florence, au sein de l'équipe du Professeur F. Bagnoli. Nous avons introduit un nouveau modèle de dynamique d'opinion, basé sur le modèle d'Ising. Le changement a essentiellement eu lieu au niveau du calcul des probabilités de transition $\tau(1|\frac{i}{k})$.

Dans un premier temps, nous avons effectué l'analyse du comportement du champ moyen c' en faisant varier le paramètre de couplage J . Nous nous sommes concentrés sur le cas où J a un comportement antiferromagnétique ($J < 0$), c'est-à-dire un modèle où c'est une minorité initiale qui l'emporte sur la majorité. Nous avons également toujours travaillé dans le cadre d'une connectivité fixe ($k = 20$). Il s'agit d'un modèle où chacun interagit à chaque fois avec ses plus proches voisins.

Grâce aux différentes simulations réalisées, nous avons observé une première phase de convergence vers un point fixe d'une valeur de $\frac{1}{2}$, due au fait que le champ extérieur H est nul. En diminuant la valeur de J , on est passé par une phase présentant un cycle limite, c'est-à-dire un comportement oscillatoire des opinions, pour arriver à une phase de chaos où plus rien n'est prévisible.

Nous avons par la suite réalisé un diagramme de bifurcation de l'équation du champ moyen en fonction de J afin de mieux visualiser l'évolution du système.

Dans un deuxième temps, nous n'avons plus travaillé avec les plus proches voisins de chaque individu, mais selon une certaine probabilité p_s , nous avons choisi de changer aléatoirement certains plus proches voisins et de prendre des connectivités à plus longue distance.

Nous avons commencé les simulations avec une probabilité nulle d'avoir des connectivités à longue portée. On observe alors un chaos microscopique avec des oscillations désynchronisées. En augmentant petit à petit la valeur de p_s , on passe par une phase présentant un cycle limite pour arriver, avec $p_s = 1$ à une simulation suivant parfaitement la courbe du champ moyen.

Nous avons également fait un diagramme de bifurcation pour mieux visualiser le comportement du système.

On peut conclure en disant que ces dernières simulations doivent encore être améliorées en essayant de trouver une nouvelle formulation de l'équation du champ moyen qui inclurait les effets "smallworld" et qui soit plus proche de la réalité.

Les résultats de ce dernier chapitre vont notamment être présentés au "Summer Solstice 2009" de Gdansk, du 22 au 24 juin 2009, par l'équipe du Professeur F. Bagnoli.

Conclusion générale

A travers ces différents chapitres, nous avons étudié plusieurs cas de formation d'opinion au sein de groupes de personnes, de taille fixe ou aléatoire. Nous avons vu que lorsque qu'il y a une situation d'ex-aequo, ce n'est pas aussi facile de prédire quelle sera l'opinion qui sortira gagnante. En général, il y a une règle de majorité locale, mais dans certains cas nous avons pu constater que cette dernière pouvait totalement se renverser pour laisser place à la minorité initiale qui parviendra à convaincre tout le monde et ainsi imposer son choix.

Ce genre de situation a déjà eu lieu [16]. En effet, on suppose toujours, lors de votes démocratiques, qu'il existe une majorité. On pense qu'il est impossible d'obtenir des résultats de votes avec une parfaite égalité, 50-50, que ce soit statistique ou social, en particulier lorsqu'il y a plusieurs millions de personnes impliquées dans le vote. La situation semble encore plus impossible lorsque le pays concerné fait face à une situation difficile avec d'importantes décisions politiques en jeu, et les deux partis en compétition proposant des changements radicaux très différents dans leur campagne d'élection respective.

Un exemple typique que l'on peut citer pour conclure, est le résultat des élections italiennes en avril 2006. En effet, tout portait à croire que Prodi allait sortir grand vainqueur de ces élections en écrasant la coalition opposée de Berlusconi. Or les votes sortants confirmaient cette prévision avant que les résultats à proprement parler l'excluent en établissant un score de 50-50 au terme des votes. En fait, Prodi a remporté à une marge de 24 755 votes, c'est-à-dire, une différence de 0.07 % sur une dépouille de plus de 38 millions de votes.

Un tel résultat d'élection fut une totale surprise et un événement extrêmement rare pour des élections nationales où les deux coalitions en compétition avaient des programmes politiques si différents. Pourtant ce genre de situation s'était déjà produite plusieurs fois, dans quelques démocraties de l'ouest. On peut commencer par citer, en 2000 aux Etats-Unis, les fameux votes Bush - Gore dans l'état de Floride. Cela s'est terminé avec la victoire de Bush, qui avait 357 votes en plus. En termes de votes nationaux, Bush avait 47.9% contre 48.4 % pour Gore, ce qui donne une marge de 0.5 % sur un total de 105 417 258 votes.

On retrouve le même phénomène en Allemagne pour les élections fédérales en 2002, ainsi qu'en 2004 aux Etats-Unis avec les élections présidentielles opposant Bush et Kerry.

Tous ces événements très rares provoquent toujours une surprise générale et pourtant, actuellement, très peu d'explications peuvent être fournies. Cela n'est d'ailleurs associé à aucun phénomène social particulier. Au vu de tels résultats, on pourrait penser que certaines personnes n'hésiteraient pas à organiser, de façon délibérée, la formation de groupes de discussion et ainsi forcer les gens à discuter entre eux d'un sujet politique bien précis. Ceci pourrait donc fausser les résultats et leur donner ainsi un grand avantage. L'étude des processus de formation de la dynamique d'opinion est assez récente et s'étend de plus en plus afin de, peut-être parvenir à prédire d'avantage ce genre de résultats.

Annexe

Voici différents codes Matlab et codes, réalisés en Fortran 90 par F. Bagnoli, utilisés pour réaliser différentes graphes dans ce travail.

A. Codes Matlab pour la partie 1 (chapitre 1 et chapitre 4) :

1. Réalisation du graphe de la variation des mises à jour pour les groupes de taille 3 et 4 (graphe 1.9 du chapitre 1) :

%1. Groupes de taille 3:

```
pc=0.5;
p=0;
while p<0.5
    ps=0;
    n=(1/log(3/2))*log((pc-ps)/(pc-p));
    hold on
    plot(p,n,'.r')
    p=p+0.001;
end
```

```
p=0.501;
while p<=1
    ps=1;
    n=(1/log(3/2)) *log((pc-ps)/(pc-p));
    hold on
    plot(p,n,'.r')
    p=p+0.001;
end
```

%2. Groupes de taille 4 avec m_42=0

```
pc=(-5+sqrt(13))/(-6);
p=0;
lambda= 12*pc^3-24*pc^2+12*pc;
while p<pc
```

```

        ps=0;
        n=(1/log(lambda))*log((pc-ps)/(pc-p));
        hold on
        plot(p,n,'.b')
        p=p+0.001;
    end

    p=pc+0.001;
    while p<=1
        ps=1;
        n=(1/log(lambda)) *log((pc-ps)/(pc-p));
        hold on
        plot(p,n,'.b')
        p=p+0.001;
    end

    %3. Groupes de taille 4 avec m_42=1

    pc=(1+sqrt(13))/(6);
    p=0;
    lambda= 12*pc^2*(1-pc);
    while p<pc
        ps=0;
        n=(1/log(lambda))*log((pc-ps)/(pc-p));
        hold on
        plot(p,n,'.b')
        p=p+0.001;
    end

    p=pc+0.001;
    while p<=1
        ps=1;
        n=(1/log(lambda)) *log((pc-ps)/(pc-p));
        hold on
        plot(p,n,'.b')
        p=p+0.001;
    end
end

```


2. Réalisation du graphe de la variation des mises à jour pour les contrariants avec $a = 0$ et $a = 0.10$ (graphe 4.2 du chapitre 4) :

%1. Cas où $a=0$

```
a=0;
pc=0.5;
p=0.2;
while p<0.5
    ps=0;
    n=(1/log(3/2*(1-2*a)))*log((pc-ps)/(pc-p))+1.85/(1-2*a)^5;
    hold on
    plot(p,n,'b')
    p=p+0.001;
end

p=0.501;
while p<=0.8
    ps=1;
    n=(1/log(3/2*(1-2*a)))*log((pc-ps)/(pc-p))+1.85/(1-2*a)^5;
    hold on
    plot(p,n,'b')
    p=p+0.001;
end
```

%2. Cas où $a=0.10$

```
a=0.10;
p=0.2;
while p<0.5
    ps=0.15;
    n=(1/log(3/2*(1-2*a)))*log((pc-ps)/(pc-p))+1.85/(1-2*a)^5;
    hold on
    plot(p,n,'r')
    p=p+0.001;
end

p=0.501;
while p<=0.8
    ps=0.85;
    n=(1/log(3/2*(1-2*a)))*log((pc-ps)/(pc-p))+1.85/(1-2*a)^5;
    hold on
    plot(p,n,'r')
    p=p+0.001;
end
```

B. Codes Fortran pour la partie 2 :

I. Chaos dans le champ moyen :

1. Code permettant de montrer la variation de l'équation du champ moyen c' en fonction de c avec variation des paramètres R, J et H

```
module MF
  integer :: R ! neighborhood size
  real, allocatable :: tau(:) ! transition probability
  integer, allocatable :: binom(:) ! binomial coefficients

  contains

  real function map(c)
    implicit none
    real :: c
    real :: c1
    integer :: i
    !calcul du mean field c
    c1 = 0
    do i=0, R
      c1 = c1 + binom(i)*c**i*(1-c)**(R-i)*tau(i)
    end do
    map=c1
  end function
end module

program meanfield
  use MF
  implicit none
  real :: J ! coupling
  real :: H ! external field
  real :: q
  integer :: i
  real :: x ! local field
  real :: c
  character*100 :: str

  !initialisation
  q = 0.1
  J = -4
  H = 0
  R = 20

  allocate(tau(0:R))
```

```

allocate(binom(0:R))

call gnuplotOpen("gnuplot")
call gnuplotExecute("set xrange [0:1]; set yrange [0:1]")
call gnuplotExecute("set xlabel 'c'")
call gnuplotExecute("set ylabel 'c''")
call gnuplotExecute("plot x,'-' w l t 'tau', '-' w l t 'mf',
  '-' w l t 'iter'")

! transition probabilities
do i=0, R
  x = real(i)/R
  if (x<q) then
    tau(i)=0
  else if (x > 1-q) then
    tau(i)=1
  else
    tau(i) = 1/(1+exp(-2*(H+J*((2*x-1))))))
  end if
  write(str, *) x, tau(i), char(0)
  call gnuplotExecute(str)
end do
call gnuplotExecute("end")

binom(0)=1
do i=1,R
  binom(i) = (binom(i-1)*(R-i+1))/i
end do

! mean field return map for various values of c
c = 0;
do while (c .le. 1)
  write(str, *) c, map(c), char(0)
  call gnuplotExecute(str)
  c = c + 0.01
end do
call gnuplotExecute("end")

! some iterations
c = 0.7429
write(str, *) c, 0, char(0)
call gnuplotExecute(str)
do i=1,100
  write(str, *) c, map(c), char(0)
  call gnuplotExecute(str)

```

```

        c = map(c)
        write(str, *) c, c, char(0)
        call gnuplotExecute(str)
    end do
    call gnuplotExecute("end")
    call gnuplotFlush
    pause
end program

```

2. Code permettant de réaliser le diagramme de bifurcation de l'équation du champ moyen en fonction du paramètre J , utilisant le même module MF :

```

program meanfield
  use MF
  implicit none
  real :: J, Jmin, Jmax, Jstep ! coupling
  real :: H ! external field
  real :: q
  integer :: i, k
  real :: x ! local field
  real :: c
  character*100 :: str
  integer :: Tsteps=100, TRANS=1000

  q = 0.1
  H = 0
  R = 20

  allocate(tau(0:R))
  allocate(binom(0:R))

  Jmin=0
  Jmax=-4
  Jstep=0.01

  call random_seed
  call gnuplotOpen("gnuplot")
  call gnuplotExecute("set yrange [0:1]")
  call gnuplotExecute("set xlabel 'J'")
  write(str,*) "set xrange [", Jmin, ":", Jmax, "]", char(0)
  call gnuplotExecute(str)
  call gnuplotExecute("plot '-' w dots")

  binom(0)=1
  do i=1, R

```

```

        binom(i) = (binom(i-1)*(R-i+1))/i
    end do

    J = Jmin

do while (J .ge. Jmax)
    ! transition probabilities
    do i=0, R
        x = real(i)/R
        if (x<q) then
            tau(i)=0
        else if (x > 1-q) then
            tau(i)=1
        else
            tau(i) = 1/(1+exp(-2*(H+J*((2*x-1))))))
        end if
    end do

    ! some iterations
    do k=1,4 ! in order to choose different initial conditions
        call random_number(c)
        do i=1,TRANS+Tsteps
            if (i>TRANS) then
                write(str, *) J, c, char(0)
                call gnuplotExecute(str)
            end if
            c = map(c)
        end do
    end do
    J = J - Jstep
end do
call gnuplotExecute("end")
call gnuplotFlush
pause
end program

```

II. Effet "smallworld" :

1. Code permettant de réaliser les simulations "smallworld" :

```
module CCA
  integer :: N ! nombre de cellules
  integer, allocatable, target :: xx(:, :)
  integer, pointer :: x(:), x1(:)
  integer, allocatable :: nK(:, :) ! nbre de voisins
  integer, allocatable :: link(:) ! liste des voisins
  integer :: graph
  integer :: R
  real :: ps ! probabilité lien smallworld
  real :: rho0 ! densité initiale
  real :: J
  real :: H
  real :: eps
  real :: q ! seuil
  real, allocatable :: tau(:) ! transition probability
  integer, allocatable :: binom(:) ! binomial coefficients

  contains
  subroutine setupGraph(graph)
    integer :: graph
    integer :: i, l

    if (allocated(link)) deallocate(link)

    ! costruzione reticolo
    select case (graph)
    case (0)
      print *, "grafo: regolare 1D, R=", R
      allocate (link(R*N))
      nk(1,:) = R
      do i=1, N
        nk(2,i) = (i-1)*R+1
        do l=0,R-1
          link(nk(2,i)+l)=mod(i-1+l,N)+1
        end do
      end do
    case (1)
      print *, "grafo: smallworld 1D, R=", R, ", p=", ps
      allocate (link(R*N))
      nk(1,:) = R
      do i=1, N
```

```

        nk(2,i) = (i-1)*R+1
        do l=0,R-1
            call random_number(rr)
            if (rr .lt. ps) then
                call random_number(rr)
                link(nk(2,i)+1)=int(rr*N)+1
            else
                link(nk(2,i)+1)=mod(i-1+l,N)+1
            end if
        end do
    end do
end select
end subroutine

real function map(c)
    implicit none
    real :: c
    real :: c1
    integer :: i

    c1 =0
    do i=0, R
        c1 = c1 + binom(i)*c**i*(1-c)**(R-i)*tau(i)
    end do
    map=c1
end function

end module

program chaoticCA
    use CCA
    implicit none
    integer :: i, l, t, TMAX, TRANS
    real :: rr
    real :: s
    integer :: neigh
    real :: rho
    character*100 :: str
    real :: c

    graph = 1
    R=20
    N = 1000
    ps=0.7
    rho0=0.5

```

```

H = 0
eps =0
J = 4
TMAX = 100
TRANS=1000
q = 0.1

call random_seed

allocate(tau(0:R))
allocate(binom(0:R))

! transition probabilities
do i=0, R
  c = real(i)/R
  if (c<q) then
    tau(i)=eps
  else if (c > 1-q) then
    tau(i)=1-eps
  else
    tau(i) = 1/(1+exp(-2*(H-J*((2*c-1))))))
  end if
end do

allocate(xx(2,N))
x => xx(1,:)
! condizione iniziale
do i=1,N
  call random_number(rr)
  if (rr<rho0) then
    x(i) = 1
  else
    x(i) = 0
  end if
end do

allocate(nk(2,N))

call setupGraph(graph)
call gnuplotOpen("gnuplot")
call gnuplotExecute("set yrange [0:1]")
call gnuplotExecute("set xlabel 'c'")
write(str, *) "plot x, '-' w l t 'mf', '-' w p t 'simul'", char(0)
call gnuplotExecute(str)

```



```

binom(0)=1
do i=1,R
  binom(i) = (binom(i-1)*(R-i+1))/i
end do

! mean field return map for various values of c
c = 0;
do while (c .le. 1)
  write(str, *) c, map(c), char(0)
  call gnuplotExecute(str)
  c = c + 0.01
end do
call gnuplotExecute("end")

! loop
do t=1, TRANS+TMAX
  x => xx(mod(t+1,2)+1,:) ! t+1 mod 2 == t-1 mod 2
  x1 => xx(mod(t,2)+1, :)
  do i=1, N
    ! calcolo vicinato
    neigh=0
    do l=0, nk(1,i)-1
      neigh = neigh + x(link(nk(2,i)+l))
    end do
    call random_number(rr)
    if (rr < tau(neigh)) then
      x1(i) =1
    else
      x1(i)=0
    end if
  end do
rho=real(sum(x1))/N
  if (t>TRANS) then
    write(str, *), rho0,rho, char(0)
    call gnuplotExecute(str)
  end if
rho0=rho
end do
call gnuplotExecute("end")
call gnuplotFlush()
pause
end program

```

2. Code permettant de réaliser le diagramme de bifurcation de l'équation du champ moyen en fonction de la probabilité de connection à longue distance p_s , utilisant le même module CCA :

```

program chaoticCA
  use CCA
  implicit none
  integer :: i, l, t, TMAX, TRANS
  real :: rr
  real :: s
  integer :: neigh
  real :: rho
  character*100 :: str
  real :: c
  real :: psstep

  graph = 1
  R=20
  N = 1000
  psstep=0.01
  rho0=0.2 ! densità
  H = 0
  eps =0
  J = 4
  TMAX = 100
  TRANS=1000
  q = 0.1

  call random_seed

  allocate(tau(0:R))
  allocate(binom(0:R))

  ! transition probabilities
  do i=0, R
    c = real(i)/R
    if (c<q) then
      tau(i)=eps
    else if (c > 1-q) then
      tau(i)=1-eps
    else
      tau(i) = 1/(1+exp(-2*(H-J*((2*c-1))))))
    end if
  end do

  allocate(xx(2,N))

```

```

allocate(nk(2,N))
call gnuplotOpen("gnuplot")
call gnuplotExecute("set yrange [0:1]")
call gnuplotExecute("set xlabel 'ps'")
call gnuplotExecute("set ylabel 'c'")
write(str, *) "plot '-' w dots", char(0)
call gnuplotExecute(str)

binom(0)=1
do i=1,R
    binom(i) = (binom(i-1)*(R-i+1))/i
end do

ps =0
do while (ps .le. 1)
x => xx(1,:)
! condizione iniziale
do i=1,N
    call random_number(rr)
    if (rr<rho0) then
        x(i) = 1
    else
        x(i) = 0
    end if
end do

call setupGraph(graph)

! loop
do t=1, TRANS+TMAX
    x => xx(mod(t+1,2)+1,:) ! t+1 mod 2 == t-1 mod 2
    x1 => xx(mod(t,2)+1, :)
    do i=1, N
        ! calcolo vicinato
        neigh=0
        do l=0, nk(1,i)-1
            neigh = neigh + x(link(nk(2,i)+l))
        end do
        call random_number(rr)
        if (rr < tau(neigh)) then
            x1(i) =1
        else
            x1(i)=0
        end if
    end do
end do

```

```

        rho=real(sum(x1))/N
        if (t>TRANS) then
            write(str, *), ps,rho, char(0)
            call gnuplotExecute(str)
        end if
        rho0=rho
    end do
    ps =ps +psstep
end do
call gnuplotExecute("end")
call gnuplotFlush()
pause
end program

```

Bibliographie

- [1] S. Galam, S. Moscovici, *Towards a theory of collective phenomena : Consensus and attitude changes in groups*, European Journal of Social Psychology, Vol. 21, pp. 49-74, Fance, 1991.
- [2] S. Galam, *Local dynamics vs. social mechanisms : A unifying frame*, Europhys. Lett., **70**(6), pp. 705-711, Fance, 2005.
- [3] S. Galam, *Heterogeneous believes, segregation and extremism in the making of public opinions*, Laboratoire des Milieux Désordonnés et Hétérogènes, Paris, 2004.
- [4] S. Galam, *Sociophysics : A review of Galam models*, Ecole Polytechnique et CNRS, Paris, 2008.
- [5] S. Galam, *Minority opinion spreading in random geometry*, Eur. Phys. J. B **25**, pp. 403-406, France, 2002.
- [6] S. Gekle, L. Peliti, S. Galam, *Opinion dynamics in a three-choice system*, CREA-Ecole Polytechnique, France, Università "Federico II", Naples, 2005.
- [7] S. Galam, *Contrarian deterministic effects on opinion dynamics : "the hung elections scenario"*, Physica A 333, pp. 453-460, Paris, 2004.
- [8] S. Galam, *Sociophysics and the Forming o public Opinion : Threshold versus Non Threshold Dynamics*, Ecole Polytechnique et CNRS, Paris, 2008.
- [9] F. Bagnoli, *Anticonformism in a simple opinion model*, Université de Florence,Italie, 2009.
- [10] F. Bagnoli, *Cellular automata*, Dynamical Modelling in Biotechnologies, Italie, 2009.
- [11] F. Bagnoli, F. Franci, R. Rechtman, *Chaos in a simple cellular automata model of a uniform society*, Université de Florence, Italie, 2005.
- [12] F. Bagnoli, *From Ising to cellular automata*, Université de Florence, Italie, 2009.
- [13] F. Bagnoli, F. Franci, R. Rechtman, *Opinion formation and phase transitions in a probabilistic cellular automaton with two absorbing states*, Université de Florence, Italie, 2005.

- [14] F. Bagnoli, F. Franci, R. Rechtman, *Phase transition of extended-range probabilistic cellular automata with two absorbing states*, Université de Florence, Italie, 2004.
- [15] S. H. Strogatz, D. J. Watts, "<http://books.google.be/books?id=6LvQIIP0TQ8C>" (chapter 4), dernière consultation : mai 2009.
- [16] S. Galam, *From 2000 Bush-Gore to 2006 Italian elections : voting at fifty-fifty and the contrarian effect*, Qual Quant 41, pp. 579-589, Paris, 2007.
- [17] Ph. L. Toint, *Algèbre*, cours de premiers baccalauréats en Sciences mathématiques et physiques, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, année académique 2004-2005.